Macmillan's New Series of Text-Books for Schools in India

अपर प्राइमरी और मिडिल क्लासों के लिये

यूक्लिड की ज्यामिति।

प्रथम अध्याय।

बंगाल के साधारण शिक्षा विभाग के डाइरेक्टर
साहिब द्वारा स्वीकृत, १९०२।

Upper Primary and Middle Vernacular

EUCLID

BOOK I.

Approved by the Director of Public Instruction, Bengal. 1902

Calcutta:
MACMILLAN & CO., LIMITED
PRINTED AT THE BAPTIST MISSION PRESS, CALCUTTA

FOUR ANNAS चार आना ।०)

सूचना ।

अंग्रेज़ी भाषा में यूक्लिड की ज्यामिति पर जितनी पुस्तकें हैं उन में हाल और स्टीवन्स ही की पुस्तक सब से उत्तम और अधिक प्रचलित है । यह ग्रन्थ उसी पुस्तक से बनाया गया है । बहुत से शिक्षकों ने हाल और स्टीवन्स के हिन्दी भाषा में अनुवाद छापने की प्रार्थना की है । आशा की जाती है कि यह हिंदी ज्यामिति भी अंग्रेज़ी की नाईं शिक्षकों और विद्यार्थियों के बीच में प्रशंसा पा कर अधिक प्रचार पावेगी ॥

यूक्लिड का सिद्धान्त।

प्रथम पुस्तक।

संज्ञा प्रकरण।

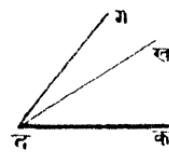
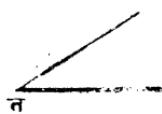
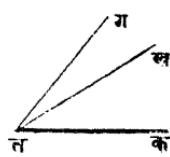
१. बिन्दु वह है जिसका स्थान हो परन्तु जिसका परिमाण न हो॥

२. रेखा वह है जिसके लम्बाई हो परन्तु चौड़ाई न हो। रेखा के सिरे बिन्दु होते हैं और दो रेखाओं के मिलने का स्थान भी बिन्दु होता है॥

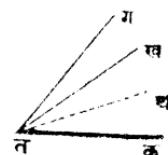
३. सीधी रेखा वह है जो अपने सिरों के बीच में बराबर स्थित हो। किसी सीधी रेखा में से कटा हुआ कोई टुकड़ा उसका भाग कहलाता है॥

४. धरातल वह है जिसमें लम्बाई चौड़ाई हो परन्तु जिसमें मोटाई न हो। धरातल की सीमा रेखा होती है॥

५. सम धरातल वह है जिसमें यदि दो बिन्दु ले लिये जायं तो उनके मध्य में जो सरल रेखा है वह पूर्ण रीति से उस धरातल में होगी। सम धरातल को प्रायः खाली धरातल कहते हैं॥

नोट—यूक्लिड बिन्दु को सामान्य रीति से किसी स्थान का चिन्ह समझता है और इस लिये उसमें देह या मूर्त्ति का कुछ ध्यान नहीं लाता इसी प्रकार से वह बिचारता है कि रेखा के गुण लम्बाई और स्थान हैं। और उसमें चौड़ाई का ध्यान न होना चाहिये। यद्यपि कोई रेखा बिना चौड़ाई के नहीं होती चाहे कैसे ही बारीक यंत्र से क्यों न खींची जाय, धरातल की संज्ञा भी इसी प्रकार से समझ लेनी चाहिये॥

६. कोण दो सीधी रेखाओं का झुकाव है जो परस्पर मिलती हैं परन्तु एक सीध में नहीं होतीं॥

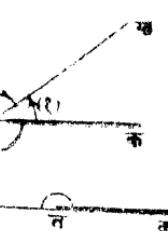
वह बिन्दु जिस पर सीधी रेखायें मिलती हैं कोण का शीर्ष कहलाता है और सीधी रेखायें स्वयं कोण के भुज कहाती हैं॥

जब कई एक कोण एक बिन्दु त पर हों तो उनमें से प्रत्येक तीन अक्षरों से बोला जाता है। जिनमें से शीर्षवाला अक्षर मध्य में रहता है। इस प्रकार से यदि सीधी रेखा तक तख तग बिन्दु त पर मिलें तो जो कोण सीधी रेखा तक तख से मिल कर बनता है वह कोण कतख या खतक कहाता है और जो कोण तक तग से मिल कर बनता है वह कोण कतग या गतक कहाता है। इसी प्रकार से जो कोण तख तग से मिल कर बनता है खतग या गतख कहाता है। परन्तु यदि बिन्दु पर एक ही कोण हो तो वह एक ही अक्षर से बोला जाता है यथा कोण त सीधी रेखा तख तग में से जो समीप के चित्र में हैं हम कहते हैं कि तग तक की तरफ तख से अधिक झुका है और इस बात को हम इस प्रकार से कहते हैं कि कोण कतग कोण कतख से बड़ा है। इस प्रकार से कोण को परिमाणवाला कह सकते हैं॥

यह बात ध्यान में रखनी चाहिये कि कोण कतग जोड़ है कोण कतख और खतग का और कतख अन्तर है कोण कतग और खतग का। प्रारम्भ करनेवालों को यह विचार न करना चाहिये कि कोण भुज के घटाने या बढ़ाने से घट या बढ़ जाता है॥

[गणित विद्या की बहुत सी शाखाओं में कोण का और प्रकार से विचार करते हैं जिसको यद्यपि यूकलिड ने नहीं लिखा तो उसका भी वर्णन यहां पर हम कर देते हैं क्योंकि इस से बहुत ही सरल

रीति से साथ यह मालूम हो जायगा कि कोण का परिमाण किसको कहते हैं ॥

मान लो कि सीधी रेखा तथ इस चित्र में बिन्दु त के चारों ओर घूम सकती है जैसे घड़ी की सूई परन्तु उसकी उलटी रीति से और मान लो कि इस प्रकार से वह स्थान तक से स्थान तख और तग पर क्रम से आई है। ऐसी रेखा को अवश्य तक से तग पर आने में तक से तख पर आने की अपेक्षा अधिक घूमना पड़ा होगा। और इस लिये कोण कतग कोण कतख से बड़ा कहाता है ॥

७. जब एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर इस प्रकार से खड़ी हो कि आसन्न कोण एक दूसरे के बराबर हों तो प्रत्येक कोण को सम कोण कहते हैं और सीधी रेखा को जो दूसरी पर खड़ी हो उसको लम्ब कहते हैं ॥

८. अधिक कोण वह है जो एक सम कोण से बड़ा परन्तु दो सम कोण से छोटा हो ॥

९. न्यून कोण वह है जो एक सम कोण से छोटा हो ॥

[आसन्न चित्र में विचार कर सकते हैं कि सीधी रेखा तख अपने वर्त्तमान स्थान पर तक से बिन्दु त के चारो ओर दोनों मार्गों में से किसी मार्ग से घूम कर आई है जिस मार्ग का चिन्ह कोण द्वारा बना हैं। इस प्रकार से विचार कर सकते हैं कि एक बिन्दु से खींची हुई दो सीधी रेखायें दो कोण बनाती हैं (जिन का चिन्ह चित्र में (१) और (२) है)

[जिसमें बड़े को पुनर्युक्त कोण कहते हैं यदि भुज तक तब एक ही सीध में हों तो दोनों तरफ जो कोण बनता है सरल कोण कहाता है ॥]

१०. धरातल का कोई भाग जो एक या अधिक सरल या कुटिल रेखा से घिरा हो चित्र कहलाता है ॥

घेरनेवाली रेखाओं का जोड़ चित्र का जोड़ कहाता है ॥

दो चित्र क्षेत्रफल में बराबर कहाते हैं जब वे किसी सम धरातल के बराबर भाग घेरते हैं ॥

११. वृत्त वह सरल चित्र है जो एक रेखा से जिस को परिधि कहते हैं घिरा हो और ऐसा हो कि जितनी रेखा उसके भीतर एक विशेष विन्दुसे परिधि तक खींची जायें परस्पर बराबर हों । इस विन्दु को वृत्त का केन्द्र कहते हैं वृत्त का व्यासार्द्ध वह सीधी रेखा है जो केन्द्र से परिधि तक खींची जाय ॥

१२. वृत्त का व्यास वह सीधी रेखा है जो केन्द्र में से होती हुई दोनों ओर परिधि पर समाप्त हो ॥

१३. वृत्तार्द्ध वह चित्र है जो वृत्त के व्यास और परिधि के उस भागसे जो व्यास ने काटा हो घिरा हो ॥

१४. वृत्त का भाग वह चित्र है जो एक सीधी रेखा से और परिधि के उस भाग से जो उस रेखा ने काटा हो घिरा हो ॥

१५. सरल चित्र वह है जो सरल या सीधी रेखाओं से घिरा हो ॥

१६. त्रिकोण वह सरल चित्र है जो तीन सीधी रेखाओं से घिरा हो । त्रिकोण के किसी कोण के विन्दु को उसका शीर्ष कह सकते हैं और उसके सामने के भुज को आधार कहते हैं ॥

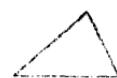
१७. चतुर्भुज वह सरल चित्र है जो चार सीधी रेखाओं से घिरा हो । वह सीधी रेखा जो चतुर्भुज में आमने सामने के कोण को मिलाती है उसका कर्ण कहाती है ॥

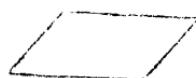
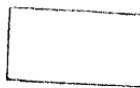
१८. बहुभुजक्षेत्र वह सरल चित्र है जो चार से अधिक सीधी रेखाओं से घिरा हो ॥

१९. समत्रिबाहु त्रिकोण वह त्रिकोण है जिस की तीनों बाहु समान हों ॥

२०. समद्विबाहु त्रिकोण वह त्रिकोण है जिस की दो बाहु परस्पर समान हों ॥

२१. विषमबाहु त्रिकोण वह त्रिकोण है जिस की तीनों बाहु असमान हों अर्थात् कोई किसी के बराबर न हों ॥

२२. समकोण त्रिकोण वह त्रिकोण है जिस में एक समकोण हो ॥

समकोण त्रिकोण में समकोण के सामने का बाहु समकोण त्रिकोण का कर्ण कहाता है ॥

२३. अधिक कोण त्रिकोण वह त्रिकोण है जिस में एक अधिक कोण हो ॥

२४. न्यून कोण त्रिकोण वह त्रिकोण है जिस के तीनों कोण न्यून हों ॥

[यह बात पीछे जान पड़ेगी कि (पुस्तक १ साध्य १७) प्रत्येक त्रिकोण में कम से कम दो न्यून कोण होने चाहियें ॥]

२५. समानान्तर सीधी रेखायें वह हैं जो एक ही धरातल में होकर दोनों तरफ चाहे जितनी दूर तक बढ़ाई जावें एक दूसरे से न मिलें ॥

२६. समानान्तर चतुर्भुज वह चतुर्भुज चित्र है जिसके आमने सामने के भुज समानान्तर हों ॥

२७. आयत वह समानान्तर चतुर्भुज है जिसका एक कोण समकोण हो ॥

२८. वर्ग वह चतुर्भुज है जिस के सब भुज समान हों और सब कोण समकोण हों ॥

यह बात थोड़े विचार से मालूम हो सकती है कि यदि किसी चतुर्भुज के सब भुज बराबर हों और एक कोण समकोण हो तो उसके सब कोण समकोण होंगे ॥

२९. विषमकोण समचतुर्भुज वह चित्र है जिसके सब भुज समान हों परन्तु जिस के कोण समकोण न हों ॥

३० विषम चतुर्भुज वह चित्र है जिस के दो बाहु समानान्तर हों ॥

अबाध्योपक्रम का वर्णन ।

माप विद्या के सीखने में जिस जिस बनावट का प्रयोजन होता है उस को पूरा करने के लिये हम को मान लेना पड़ेगा कि कुछ यन्त्र मिल सकते हैं परन्तु यह सदा याद रखना चाहिये कि ऐसे यन्त्र जहां तक हो सके कम और साधारण होने चाहियें ॥

पहिले छः पुस्तकों के लिये एक सीधी रेखा खींचनेवाली लकड़ी और परकार की आवश्यकता होती है ॥ और नीचे लिखे हुए अनुमान अमूल या प्रार्थनाओं में यूक्लिड ऐसे यन्त्र से काम लेने की आज्ञा देता है और मान लेता है कि यह यन्त्र नीचे लिखे हुवे उपायों की सिद्धि और व्यवहार दोनों के लिये साधक हैं ॥

अबाध्योपक्रम ।

मान लो

१. कि एक सीधी रेखा किसी एक बिन्दु से किसी दूसरे बिन्दु तक

खींची जा सकती है ॥ जब हम बिन्दु क से बिन्दु ख तक एक सीधी रेखा खींचते हैं तो हम क ख को मिलाते हैं ।

२. कि एक सीमाबद्ध सीधी रेखा को उसी सीध में चाहे जितनी दूर तक बढ़ा सकते हैं ॥

३. कि एक वृत्त किसी केन्द्र से कितने दूर पर या किसी व्यासार्द्ध के साथ जो उस सीमाबद्ध सीधी रेखा के बराबर हो जो केन्द्र से खींची जाय खींच सकते हैं ।

यह बात ध्यान में रखना अवश्य है कि इन माने हुये नियमों में सीध मापने का कोई उपाय नहीं है इस लिये सीधी लकड़ी पर मापने के चिह्न न होने चाहियें और यूकलिड के काम के अनुसार परकार से स्थान मापने का काम न लेना चाहिये ॥

स्वयंसिद्ध का वर्णन ॥

माप विद्या कई साधारण तत्त्वों पर निर्भर है जिन की सत्यता आरम्भ में ही स्वयं प्रगट है इन प्रगट तत्त्वों को यूकलिड साधारण चिन्ता कहता है और ये स्वयं सिद्ध भी कहाते हैं ॥

किसी स्वयं सिद्ध के आवश्यक चिन्ह ये हैं ॥

१. कि ये स्वयं प्रगट हो या वह तरह से बिना प्रमाण के मान लिया जाय ।

२. कि वह मूल हो अर्थात् उसकी सत्यता उस से अधिक साधारण तत्त्व से निकले ।

३. कि वह और तत्त्वों के स्थापित करने में मूल हो ॥

यह चिन्ह निम्नलिखित संज्ञा में इकट्ठे किये गये हैं ।

संज्ञा-स्वयंसिद्ध एक प्रगट सत्य है जिस को प्रमाण की आवश्यकता नहीं और न जिसका प्रमाण दे सकते हैं परन्तु जो आगामी तर्क के मूल का काम देता है ॥

स्वयंसिद्ध दो प्रकार का होता है साधारण और मापिक साधारण स्वयंसिद्ध सब प्रकार के परिमाण में घटित होते हैं ॥

मापिक स्वयंसिद्ध विशेष करके मापिक परिमाण में जिन का संज्ञा प्रकरण में वर्णन हो चुका है घटित होते हैं ॥

साधारण स्वयंसिद्ध ।

१. वस्तुएं जो एक ही वस्तु के बराबर हों परस्पर समान होती हैं ॥

२. यदि समान पदार्थों में समान पदार्थ जोड़ दें तो जोड़ भी समान होंगे ॥

३. यदि समान पदार्थों में से समान पदार्थ निकाल लिये जायं तो बचे हुये भाग समान होंगे ॥

४. यदि असमान पदार्थों में समान पदार्थ जोड़ दें तो जोड़ असमान होंगे बड़ा पदार्थ वह होगा जो जोड़ने से पहिले बड़ा था ॥

५. यदि असमान पदार्थों में से समान पदार्थ निकाल लिये जांय तो बचे हुये भाग असमान होंगे और बड़ा वह होगा जो निकालने से पहिले बड़ा था ॥

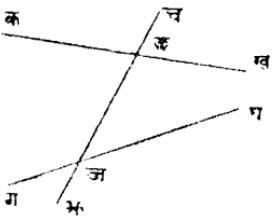
६. पदार्थ जो एक ही पदार्थ के या समान पदार्थों के दूने होते हैं बराबर होते हैं ॥

७. पदार्थ जो एकही पदार्थ के या समान पदार्थों के आधे होते हैं परस्पर समान होते हैं ॥

९. * सम्पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है ॥

मापिक स्वयंसिद्ध ।

८. परिमाण जो एक दूसरे के ऊपर ठीक आ जाते हैं बराबर होते हैं । यह स्वयंसिद्धि दो मापिक परिमाणों की समानता की सब से उत्तम जांच है इसका अर्थ यह है कि एक रेखा या कोण या चित्र अपने

* साधारण और मापिक स्वयंसिद्ध में भेद रखने के लिये हम ने यूक्लिड के नवें स्वयंसिद्धि को आठ वें से पहिले लिखा है ॥

स्थान से उठा लिया जाय और दूसरी किसी रेखा या कोण या चित्र पर यह देखने के लिये धर दिया जाय कि दोनों परस्पर समान हैं या नहीं यह रीति आच्छादन की रीति कहाती है और पहिला मापक परिमाण दूसरे पर आच्छादित कहाता है। [यह रीति मन में की जाती है अर्थात् मन में विचार करते हैं कि एक रेखा दूसरी रेखा पर रक्खी जावे पर यथार्थ में यह रीति नहीं होती ॥]

१०. दो सीधी रेखायें किसी स्थान को नहीं घेर सकतीं ॥

११ सब समकोण परस्पर समान होते हैं ॥

[ऊपर लिखी बात कि सब समकोण समान हैं सिद्ध की जा सकती है और इस लिये स्वयंसिद्ध में इसकी गणना न होनी चाहिये]

१२ यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं से इस प्रकार से मिले कि अपने एक ही ओर के दो अन्तः कोण को मिलाकर दो समकोण से छोटा बनावे और ये यदि उस ओर बढ़ाई जायं कि जिस ओर के अन्तःकोण दो समकोण से कम हैं तो सीधी रेखाएं उसी ओर परस्पर मिल जावेंगी। यदि दो सीधी रेखायें अर्थात् कख-गघ से एक सीधी रेखा चझ बिन्दु छ और ज पर इस प्रकार से मिले कि कोण खछज-घजछ मिल कर दो समकोण से कम हों तो कहते हैं कि कख और गघ यदि ख और घ की ओर लगातार बढ़ाई जायं तो परस्पर मिल जावेंगी ॥

[१२. स्वयंसिद्ध में दो शङ्का होती हैं प्रथम यह है कि इसका प्रमाण प्रत्यक्ष नहीं है द्वितीय इसका तत्त्व इससे अधिक साधारण तत्त्वों से निकल सकता है। पहिली पुस्तक के २९ वें साध्य में इसका पहिले पहिल काम पड़ता है जहां इस शंका पर थोड़ा सा शास्त्रार्थ भी मिलेगा ॥

इस स्वयंसिद्ध का विपर्यय पहिली पुस्तक के १७ वें साध्य में सिद्ध किया गया है ॥]

॥ उपक्रमणिका ॥

धरातल माप विद्या में उन सब रेखाओं और चित्रों के गुणों का बर्णन होता है जो किसी सम धरातल पर खींची जा सकती हैं ॥
यूक्लिड अपनी पहिली छः पुस्तकों में सीधी रेखाओं, सरल चित्रों और वृत्तों के गुणों का बर्णन करता है ॥

संज्ञा प्रकरण से इन पुस्तकों का विषय ज्ञान पड़ता है। स्वयंसिद्ध और अबाधोपक्रम उन मूल तत्त्वों को बताते हैं जिनसे इस विषय पर तर्क और वितर्क होता है युक्लिड ने इस विषय को बहुत से पृथक पृथक तर्कों में बांटा है जिन को साध्य कहते हैं और प्रत्येक साध्य यद्यपि स्वयं सम्पूर्ण हैं तथापि पहिले पारिणामों से सिद्ध होते है और स्वयं आगामी साध्यों को सिद्ध करते है ॥

साध्य दो प्रकार के हैं वस्तूपपाद्य और प्रमेयोपपाद्य। वस्तूपपाद्य का अभिप्राय किसी रेखागणित की बनावट होती है यथा किसी विशेष रेखा का खींचना या किसी विशेष चित्र का खींचना ॥

प्रमेयोपपाद्य का अभिप्राय किसी रेखागणिततत्त्वका सिद्ध करना होता है एक साध्य में निम्नलिखित भाग होते हैं।

साधारण प्रतिज्ञा, विशेष प्रतिज्ञा, बनावट और प्रमाण ॥

१. साधारण प्रतिज्ञा साधारण रीति से प्रथम ही साध्य का अभिप्राय वर्णन करती है ॥

वस्तूपपाद्य साध्य में प्रतिज्ञा उस बनावट को बताती है जो बनानी होती है ॥ इसलिये वह प्रथम निर्दिष्ट को बताती है और द्वितीय करणीय अर्थात् जिसको करना है उसे बताती है ॥

प्रमेयोपपाद्य साध्य में प्रतिज्ञा उस गुणका वर्णन करती है जिसका

प्रमाण देना है वह पहिले कल्पित अर्थ और पीछे फल या सिद्धान्त को बताती है ॥

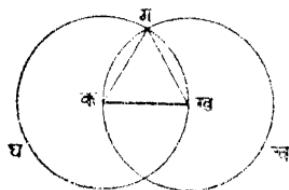
२. विशेष प्रतिज्ञा विशेष शब्दों में उसी बात को फिर वर्णन करती है और एक चित्र के द्वारा विद्यार्थी को तर्क समझाती है ॥

३. बनावट बतलाती है कि कौन कौनसी सीधी रेखायें और वृत्त खींचने चाहियें जिनसे वस्तूपपाद्य अभिप्राय पूर्ण हो या प्रमेयोपपाद्य की सचाई सिद्ध हो ॥

४ और अन्त में प्रमाण यह बताता है कि वस्तूपपाद्य का अभिप्राय पूरा हुवा या प्रमेयोपपाद्य के तत्त्व का गुण सत्य है ॥

यूकलिड का तर्क अनुमेय कहलाता है क्योंकि वह लगातार तर्क के द्वारा जाने और माने हुवे सत्यों से और और सत्यों का अनुमान कराता है ॥

अक्षर क्यू. इ. डी प्रमाणित के पीछे लगाये जाते हैं और क्वाड इरैट डिमान्स्ट्रेन्डम् के लिये हैं जिसका अर्थ है जो प्रमाणित किया गया है ॥

सिद्धांत यह है जिसकी सत्यता किसी प्रमाणित साध्य से समझ में आ जाती है और इसलिये वह उस साध्य के पीछे अनुमान के सदृश लगा दिया जाता है जिसको अधिक प्रमाण का प्रयोजन न हो ॥

निम्नलिखित चिन्ह और अक्षर पहिले पुस्तकों के लिखने में काम में आ सकते हैं परन्तु सीखनेवाले विद्यार्थियों को उससे काम न लेना चाहिये ॥

∵	वास्ते, इसलिये	
=	"	समान हैं
∠	"	कोण।
△	"	त्रिकोण
सम ॥	"	समानान्तर रेखा
सम. चतु.	"	समानान्तर चतुर्भुज ॥

पहिला भाग।

साध्य १ वस्तूपपाद्य।

दी हुई परिमित सीधी रेखा पर एक समत्रिबाहु त्रिकोण बनाओ॥

मान लो कि कख एक सीधी रेखा दी हुई है कख पर सम त्रिबाहु त्रिकोण बनाना है॥

बनावट—केन्द्र क से कख को व्यासार्द्ध तान कर वृत्त खगघ खींचो १. अ. ३

केन्द्र ख से खक को व्यासार्द्ध तान कर वृत्त कगच खींचो अनु. ३.

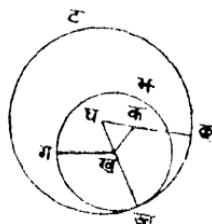
बिन्दु ग से जहां वृत्त एक दूसरे को काटते हैं सीधी रेखा गक गख बिन्दु क और ख तक खींचो अ. १.

तो कखग समत्रिबाहु त्रिकोण होगा.

प्रमाण—क्योंकि क वृत्त खगघ का केन्द्र है इस लिये कग समान हैं कख के संज्ञा. ११.

और क्योंकि ख वृत्त कगच का केन्द्र है इस लिये खग खक परस्पर समान हैं संज्ञा. ११.

परन्तु कग कख परस्पर समान दिखाये गये हैं इस लिये कग और खग दोनों क ख के समान हैं॥

परन्तु पदार्थ जो एक ही पदार्थ के समान होते हैं परस्पर समान होते हैं स्व. १.

इसलिये कग खग परस्पर समान हैं ॥

इसलिये कग कख खग परस्पर समान हैं ॥

इसलिये कखग समत्रिबाहु त्रिकोण है और वह दी हुई सीधी रेखा कख पर बनाया गया है ॥

साध्य २ वस्तूपपाद्य ।

दिये हुवे बिन्दु से दी हुई सीधी रेखा के समान एक सीधी रेखा खींचो ॥

मान लो कि क दिया हुवा बिन्दु है और खग दी हुई सीधी रेखा है ॥

बिन्दु क से एक सीधी रेखा खग के समान खींचना चाहते हैं ।

बनावट — खक को मिला दो — अनु. १.

और कख पर घकख समत्रिबाहु त्रिकोण बनाओ — १. १.

केन्द्र ख से खग को व्यासार्द्ध मान कर वृत्त गजभ खींचो — अनु. ३.

घख को वृत्त गजभ से मिलने के लिये ज तक बढ़ाओ — अनु. २.

केन्द्र घ से घज को व्यासार्द्ध मानकर वृत्त जटङ बनाओ और — अनु. ३.

घक को वृत्त जटङ से मिलने के लिये ङ तक बढ़ाओ — अनु. २.

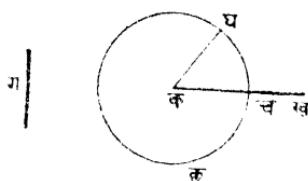
तो कङ खग परस्पर समान होंगे ॥

प्रमाण — क्योंकि ख वृत्त गजभ का केन्द्र है इसलिये खग खज परस्पर समान हैं — संज्ञा. ११.

और क्योंकि घ वृत्त जटङ का केन्द्र है घङ घज परस्पर बराबर हैं — संज्ञा. १५.

और घक घख उनके भाग बराबर हैं इसलिये शेष संज्ञा १६

कक शेष खज के समान है स्व. ३.

और खग खज परस्पर समान दिखाये गये हैं इसलिये कक और खग दोनों खज के तुल्य हैं परन्तु पदार्थ जो एक पदार्थ के समान हों परस्पर समान होते है स्व. १

इसलिये कक खग परस्पर बराबर हैं और कक रेखा विन्दु क से खींची गई है ॥

[इस साध्यकी आवश्यकता इस कारण से है कि युक्लिड ने परकार द्वारा लम्बाई नापने की आज्ञा नहीं दी है ॥]

साध्य ३ वस्तूपपाद्य।

दो हुई दो सीधी रेखाओं में से छोटी के तुल्य बड़ी रेखा में से एक भाग काटो ॥

मान लो कि कख और ग दो दी हुई सीधी रेखायें हैं जिन में कख बड़ी है ग के तुल्य कख में से एक भाग काटना है ॥

बनावट — विन्दु क से एक रेखा कघ ग के बराबर खींचो १. २.

और केन्द्र क से कघ को व्यासार्द्ध मानकर वृत्त घचक खींचो अनु. ३

जो कख को च पर काटे तो कच बराबर होगा ग के ॥

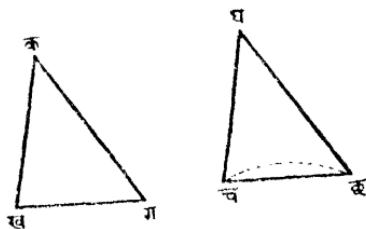
प्रमाण — क्योंकि क वृत्त घचक का केन्द्र है इसलिये कच कघ परस्पर समान हैं संज्ञा. ११

परन्तु ग बराबर है कघ के बनावट

इसलिये कच और ग दोनों कघ के बराबर हैं ॥

इसलिये कच बराबर ग के है और वह कख में से काटा गया है। क्यु. ई. एफ्.

अभ्यास।

१. किसी दी हुई सीधी रेखा पर एक ऐसा समद्विबाहु त्रिकोण बनाओ जिसके सम भुज किसी दी हुई रेखा के समान हों॥

२. किसी दिये हुये आधार पर एक समद्विबाहु त्रिकोण बनाओ जिस के समबाहु आधार के दूने हों॥

३. पृ. १ साध्य २ के चित्र में यदि कख खग समान हों तो दिखाओ कि समत्रिबाहु त्रिकोण का शीर्ष वृत्त गजझ की परिधि पर होगा॥

दर्शनीय प्रत्येक त्रिकोण के छः भाग होते हैं तीन उसके भुज तीन उसके कोण॥ दो त्रिकोण सब प्रकार से परस्पर समान होते हैं और वह आच्छादन की रीति से एक दूसरे को पूरा पूरा ढक लेते हैं और इस अवस्था में एक त्रिकोण का कोई भाग दूसरे उसी भाग के समान होता है॥ (देखो नोट स्वयं सिद्ध ८)॥

साध्य ४ प्रमेयोपपाद्य।

यदि दो त्रिकोणों में एक त्रिकोण के दो बाहु दूसरे त्रिकोण के दो बाहुओं के क्रमशः समान हों और इन बाहुओं से बने हुये दो कोण भी परस्पर समान हों तो उनके तीसरे बाहु या आधार परस्पर समान होंगे और एक त्रिकोण के शेष कोण दूसरे के शेष कोण से पृथक् पृथक् समान होंगे अर्थात् वे कोण परस्पर समान होंगे जिन के सामने के बाहु बराबर हैं अर्थात् दोनों त्रिकोण सब प्रकार से परस्पर समान होंगे॥

मान लो कि कखग घचछ दो त्रिकोण हैं जिन में बाहु कख बाहु घच

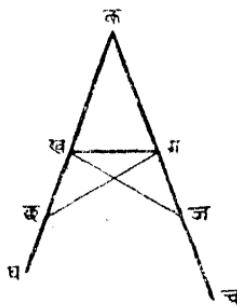
के समान है और बाहु कग बाहु घक्त के समान है और अन्तर्वर्त्ती कोण खकग अन्तर्गत कोण चघक्त के समान है तो आधार खग आधार चक्त के समान होगा और दो क्षेत्रफल में त्रिकोण कखग त्रिकोण घचक्त के बराबर होगा और शेष कोण पृथक् पृथक् समान होंगे जिनके सामने के बाहु समान हैं अर्थात् कोण कखग कोण घचक्त के बराबर होगा और कोण कगख कोण घक्तच के समान होगा क्योंकि यदि त्रिकोण कखग त्रिकोण घचक्त पर लगाया जाय इस रीति से कि बिन्दु क बिन्दु घ पर स्थित हो और सीधी रेखा कख सीधी रेखा घच पर पड़े तो क्योंकि कख और घच समान हैं इसलिये बिन्दु ख बिन्दु च पर होना चाहिये ॥ और क्योंकि कख घच पर स्थित है और कोण खकग कोण चघक्त पर है इसलिये कग अवश्य घक्त पर स्थित होगा और क्योंकि कग घक्त पर है इसलिये बिन्दु ग बिन्दु क्त पर स्थित होगा ॥ फिर जब ख च पर स्थित है औ ग, क्त पर तो आधार खग आधार चक्त परस्थित होगा ॥ यदि ऐसा नहो तो दो सीधी रेखायें एक जगह को घेर लेंगी जो असम्भव है स्व. १०.

इसलिये आधार खग आधार चक्त पर स्थित है और उसके समान है स्व. ८.

और त्रिकोण कखग त्रिकोण घचक्त पर स्थित है और इसलिये क्षेत्रफल में उसके समान है ॥ स्व. ८

और एक के शेष कोण दूसरे के शेष कोण पर ठीक २ पड़ते हैं और इसलिये समान हैं अर्थात कोण कखग कोण घचक्त के समान है और कोण कगख कोण घक्तच के समान है अर्थात् त्रिकोण सब प्रकार से समान हैं क्यू. इ. डी

नोट — इससे अनुमान होता है कि दो त्रिकोण जो सब भाग में समान होते हैं क्षेत्रफल में भी समान होते हैं परन्तु यह बात ध्यान में रखनी चाहिये कि त्रिकोण जो क्षेत्रफल में समान होते हैं यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक भाग में समान हों अर्थात् त्रिकोण विना समान रूप के भी क्षेत्रफल

में समान हो सकते हैं। दो त्रिकोण जो सब प्रकार से समान होते हैं रूप और परिमाण में एक होते हैं और इसलिये उनको समान या तुल्य कहते हैं ॥

चौथे साध्य का निम्नलिखित प्रयोग पांचवें साध्यकी विशेष कठिनाई को बताता है ॥

किसी समद्विबाहु त्रिकोण कखग के समभुज कख कग में बिन्दु स और र इस प्रकार से लिये गये हैं कि क स बराबर है कर के औ खर और ग स मिलाये गये हैं सिद्ध करो कि खर गस परस्पर समान हैं दो त्रिकोण सकग रकख में सक बराबर रक के है और कग बराबर कख के है कल्पित अर्थ अर्थात दो बाहु सक कग दो बाहु रक कख के पृथक् पृथक् बराबर हैं और कोण क जो इन बाहुओं से मिलकर बना है दोनों में सामान्य है इसलिये त्रिकोण सब प्रकार से बराबर हैं इसलिये सग रख के बराबर है ॥

साध्य ५ प्रमेयोपपाद्य ।

किसी समद्विबाहु त्रिकोण के आधार पर स्थित कोण परस्पर समान होते हैं और यदि सम बाहु बढ़ाये जायें तो आधार की दूसरी ओर स्थित कोण भी परस्पर समान होंगे ॥

मान लो कि कखग एक समद्विबाहु त्रिकोण है जिसके भुज कख कग

परस्पर समान हैं और सीधी रेखा कग बिन्दु घ और रेखा कग बिन्दु च तक बढ़ाई गई है।

तो कोण कखग कोण कगख के समान होगा और कोण गखघ कोण खगच के समान होगा-

बनावट — खघ में कोई बिन्दु क लो और कच बड़े में से कज भाग काटो जो समान कक्ष के हो जो छोटा है 1. 3

क्ग जख को मिलाओ

प्रमाण, — क्योंकि त्रिकोण क्कग जकख में कक्ष समान जक के है |बनावट
और कग समान कख के है |कल्पित अर्थ

और अन्तर्गत कोण क दोनों में साधारण है॥

इसलिये त्रिकोण क्कग त्रिकोण जकख के सब प्रकार से समान है |1. 8.

अर्थात आधार क्ग आधार जख के समान है।

और कोण कगक्ष कोण कखज के समान है।

और कोण कक्षग कोण कजख के समान है॥

फिर क्योंकि सब कक्ष सब कज के समान है जिन के भाग कख-कग परस्पर समान हैं |कल्पित अर्थ

इसलिये शेष खक्ष शेष गज के समान है॥

फिर क्योंकि दो त्रिकोण खक्षग-गजख में खक्ष समान गज के है |प्रमाण
और क्ग समान जख के है प्रमाणित

और अन्तर्गत कोण खक्षग अन्तर्गत कोण गजख के समान है |प्रमाणित

इसलिये त्रिकोण खक्षग-गजख सब प्रकार से परस्पर समान हैं 1.8

इसलिये कोण क्खग कोण जगख के समान है और कोण खगक्ष कोण गखज के समान है 1.8

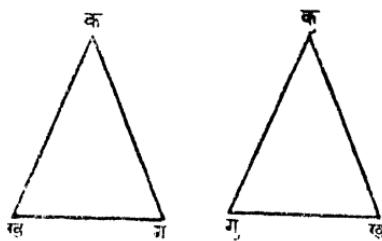
अब यह सिद्ध हो चुका है कि सब कोण क्खज सब कोण कगक्ष के समान है और इनके भाग अर्थात् कोण गखक्ष-खगक्ष परस्पर समान हैं।

इसलिये शेष कोण कखग शेष कोण कगख के समान है और यह त्रिकोण कखग के आधार पर स्थित कोण हैं॥ और यह भी सिद्ध हो चुका है कि कोण कखग कोण जगख के समान है और यह आधार की दूसरी ओर के कोण हैं॥

सिद्धांत – इसलिये एक त्रिकोण सम त्रिकोण होता है यदि वह समत्रि – बाहु त्रिकोण हो॥

॥ अभ्यास ॥

१. कख एक दी हुई सीधी रेखा है और ग उसके बाहर एक बिन्दु है। बताओ कि कख में किस प्रकार से बिन्दु मालूम करें कि उनका अन्तर ग से दी हुई लम्बाई च के समान हो क्या ऐसे बिन्दु सदा मिल सकते हैं॥

२. यदि किसी समद्विबाहु त्रिकोण का शीर्ष ग और एक सिरा आधार का क दिया हो तो आधार का दूसरा सिरा ख मालूम करो यदि वह किसी दी हुई सीधी रेखा प द पर स्थित हो॥

३. एक विषम कोण समचतुर्भुज बनाओ जिसके दो सामने के कोण बिन्दु क और ग दिये हैं और प्रत्येक बाहु की लम्बाई दी हुई है॥

४. कडढख एक सीधी रेखा है कख पर एक त्रिकोण कखग ऐसा बनाओ कि बाहु कग समान हो कढ के और बाहु खग समान हो डख के॥

५. साध्य २ में बिन्दु क को खग के दोनों सिरों से मिला सकते हैं चित्र खींचो और साध्य को सिद्ध करो उस दशा में जब कग मिला दिये जायें॥

निम्नलिखित प्रमाण कभी कभी साध्य ५ के प्रथम भाग के बदले में दिया जाता है॥

साध्य ५ द्वितीय प्रमाण।

मान लो कि कखग एक समद्विबाहु त्रिकोण है जिस के बाहु कख और कग परस्पर समान हैं तो कोण कखग कोण कगख के समान होगा॥

मान लो कि त्रिकोण कखग उठाकर उलटा करके फिर कुखुगु दशा में रक्खा जाता है जिस में कुखु कुगु खुगु पृथक् पृथक् कख कग खग की नई दशा हैं॥ फिर कुखु समान हैं कुगु के और कुखु कख की नई दशा है इसलिये कख समान है कुगु के॥ इसी प्रकार से कग समान है कुखु के और अन्तर्गत कोण खकग अन्तर्गत कोण गुकुखु के समान है क्योंकि वह भिन्न दशा में एक ही कोण है॥ इसलिये त्रिकोण कखग त्रिकोण कुगुखु के सब प्रकार से समान है॥ इसलिये कोण कखग कोण　— १.४

कुगुखु के समान है॥ परन्तु कोण कुगुखु कोण कगख की नई दशा है इसलिये कोण कखग कोण कगख के समान है॥

अभ्यास विशेष कर॥

साध्य ४ और ५ पर।

१. दो वृत्तों का केन्द्र त एक ही है तकघ और तखच दो सीधी रेखायें खींची गई हैं जो छोटे वृत्त को कख में और बड़े वृत्त को घच में काटती हैं सिद्ध करो कि (१) कघ = खच (२) घख = चक (३) कोण घकख कोण चखक के समान है (४) कोण तघख कोण तचक के समान है॥

२. कखगघ एक वर्ग है कख खग और कघ के मध्य बिन्दु ठडढ हैं पृथक् पृथक् तो सिद्ध करो कि (१) ठड = ठढ (२) कड = घड (३) कढ = कड (४) खढ = घड।

[हर दशा में नया चित्र खींचो]

३. त एक वृत्त का केन्द्र है और तक तख उसके व्यासार्द्ध हैं तड कोण कतख को दो बराबर भागों में बांटता है और रेखा कख को ड पर काटता है सिद्ध करो कि कड = खड॥

४. कखग घखग दो समद्विबाहु त्रिकोण एक ही आधार खग पर उसके आमने सामने स्थित हैं सिद्ध करो कि कोण कखघ कोण कगघ के समान है॥

५. कखग घखग दो समद्विबाहु त्रिकोण एक ही आधार खग पर उसके आमने सामने स्थित हैं यदि कघ को मिला दें तो सिद्ध करो कि कोण खकग खघग दो बराबर भागों में बंट जायंगे॥

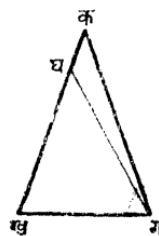
६. यदध नदध दो समद्विबाहु त्रिकोण एक ही आधार दध पर उसके एक ही ओर स्थित हैं सिद्ध करो कि कोण यदन धन के समान है और रेखा यन कोण दयध को दो बराबर भागों में बांटती है॥

७. अभ्यास ५ के चित्र में रेखा कघ खग से च पर मिलती है सिद्ध करो कि खच = चग॥

८. कख गघ एक विषम कोण समबाहु चतुर्भुज है और कग मिलाया गया है सिद्ध करो कि कोण घकख कोण घगख के समान है॥

९. कखगघ एक चतुर्भुज है जिसके आमने सामने के बाहु खग कघ परस्पर समान हैं और कोण खगघ कोण कघग के समान है सिद्ध करो कि खघ = कग॥

१०. किसी समद्विबाहु त्रिकोण के समान बाहु कख कग हैं — ठडढ कख खग गक के मध्य बिन्दु हैं पृथक् पृथक् सिद्ध करो कि ढठ = डढ और कोण कठड कोण कढड के समान है॥

संज्ञा — एक प्रमेय या प्रमाणिक दूसरे का विरुद्धावयव कहलाता है जब कि एक का कल्पित अर्थ दूसरे का फल हो जावे ॥

साध्य ५ और ६ के कल्पित अर्थ और फल के मिलान करने पर जान पड़ेगा कि एक दूसरे का विरुद्धावयव है ॥

वक्र रीति से सिद्ध करने की रीति जिसको युक्लिड प्रायः काम में लाता है प्रथम प्रथम साध्य ६ में काम आई है यह रीति बताती है कि अप्रमेय को असत्य मानने से फल अनर्थक होगा इस प्रकार की सिद्धि रिडकशियो एड अबसरडम कहाती है और प्रायः किसी साध्य के विरुद्धावयव के सिद्ध करने में काम आती है यह मान लेना चाहिये कि प्रत्येक सत्य साध्य का विरुद्धावयव भी अवश्य सत्य होगा-यथा ॥

साध्य ८ के अनुमान से जान पड़ेगा कि यदि दो त्रिकोण के सब बाहु पृथक् पृथक् परस्पर समान हों तो उनके सब कोण भी पृथक् पृथक् समान होंगे — परन्तु यह एक चित्र द्वारा शीघ्र जान सकते हैं कि इस साध्य का विरुद्धावयव अवश्य सत्य नहीं है ॥

साध्य ६ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि किसी त्रिकोण के दो कोण परस्पर समान होंगे तो उनके सामने के बाहु भी परस्पर समान होंगे ॥

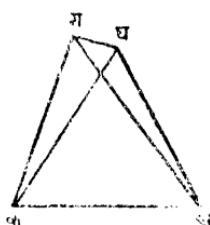
मानलो कि कखग एक त्रिकोण है जिसका कोण कखग कोण कगख के समान है तो बाहु कग बाहु कख के समान होगा ॥

बनावट -- यदि कग कख परस्पर समान न हों तो उन में से एक बड़ा होगा यदि सम्भव हो तो कख को बड़ा मान लो और उस में खघ समान कग के काटो १.३

घग को जोड़ो ।

प्रमाण -- फिर क्योंकि त्रिकोण घखग कगख में घख समान कग के बनाया गया है और खग दोनों में सामान्य है और अन्तर्गत कोण घखग अन्तर्गत कोण कगख के समान है कल्पितार्थ

इसलिये त्रिकोण घखग त्रिकोण कगख के समान है १.४

अर्थात् समग्र अपने भाग के समान है जो असम्भव है स्व.६

इसलिये कख कग के असमान नहीं है

अर्थात् कख कग परस्पर समान हैं

सिद्धांत -- यदि कोई त्रिकोण सम त्रिकोण हो तो वह समत्रिभुज भी होगा ।

साध्य ७ प्रमेयोपपाद्य ।

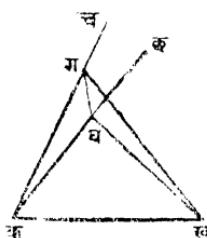
एक ही आधार पर और उसके एक ही ओर दो त्रिकोण ऐसे नहीं हो सकते जिन के वे बाहु जो आधार के एक सिरे पर समाप्त होते हैं परस्पर समान हों और उसी प्रकार वे बाहु जो दूसरे सिरे पर समाप्त हों परस्पर समान हों ॥

यदि सम्भव हो तो एक ही आधार कख पर और उसके एक ही ओर दो त्रिकोण कगख कघख ऐसे होवें हो जिन के बाहु कग कघ जो क पर

समाप्त होते हैं परस्पर समान हों और उसी प्रकार से खग खघ जो ख पर समाप्त होते हैं परस्पर समान हों ॥

दशा. १ – जब एक त्रिकोण का शीर्ष दूसरे त्रिकोण के बाहर हो

बनावट – गघ को जोड़ दो ।

प्रमाण -- फिर क्योंकि त्रिकोण कगघ में कग कघ परस्पर समान हैं क. अर्थ.

इसलिये कोण कगघ कोण कघग के समान है १.५.

परन्तु सकल कोण कगघ अपने भाग कोण खगघ से बड़ा है इसलिये कोण कघग भी कोण खगघ से बड़ा है तो कोण खघग कोण खगघ से और भी अधिक बड़ा है ॥

फिर क्योंकि त्रिकोण खगघ में खग खघ परस्पर समान हैं इसलिये कोण खघग कोण खगघ के समान है १.५.

परन्तु वह इससे बड़ा सिद्ध किया गया था जो असम्भव है ॥

दशा २ – जब एक शीर्ष जैसे घ दूसरे त्रिकोण कगख के भीतर हो

बनावट जैसे पहिले गघ को मिला दो अभि. १.

और कग कख को च और छ तक बढ़ा दो अनु. २.

फिर क्योंकि त्रिकोण कगघ में कग समान कघ के है क. अर्थ.

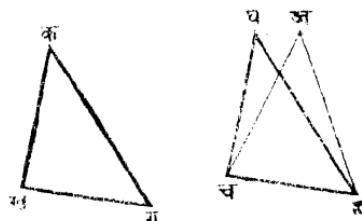
इसलिये कोण चगघ छघग जो आधार की दूसरी ओर हैं परस्पर समान हैं १.५.

परन्तु कोण चगघ कोण खगघ से बड़ा है इसलिये कोण छघग भी

कोण खगघ से बड़ा है तो कोण खघग कोण खगघ से और भी अधिक बड़ा है ॥

फिर त्रिकोण खगघ में क्योंकि

खग और खघ परस्पर समान हैं इसलिये कोण खघग कोण खघग के समान है १. ५.

परन्तु यह बड़ा सिद्ध किया गया था जो असम्भव है ॥

वह दशा जिस में एक त्रिकोण का शीर्ष दूसरे के किसी बाहु पर स्थित हो साधारण है और इसलिये सिद्धि की ज़रूरत नहीं है ॥

इसलिये कग कघ परस्पर समान नहीं हो सकते तथा खग और खघ उसी समय परस्पर समान नहीं हो सकते ॥

नोट – बाहु कग कघ सीमावर्त्ती कहाते हैं और उसी प्रकार बाहु खग खघ भी सीमा वर्त्ती कहाते हैं ॥

साध्य ८ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि एक त्रिकोण के दो बाहु दूसरे त्रिकोण के दो बाहु के पृथक् पृथक् समान हों और उनके आधार भी परस्पर समान हों तो एक के दो समान बाहुओं का अन्तर्गत कोण दूसरे के समान बाहुओं के अन्तर्गत कोण के समान होगा ।

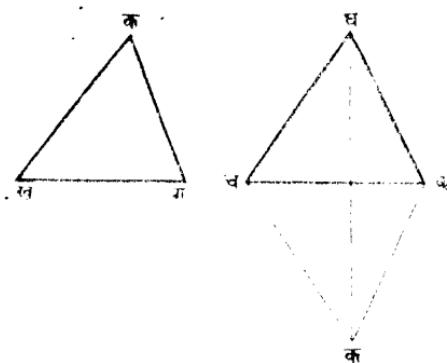
मानलो कि त्रिकोण कखग घचछ के दो बाहु खक कग दो बाहु चघ घछ के पृथक् पृथक् समान हैं अर्थात् खक चघ परस्पर समान हैं और

कग घक्क परस्पर समान हैं और आधार खग आधार चक्क के समान है तो कोण खकग कोण चघक्क के समान होगा ॥

प्रमाण – क्योंकि यदि त्रिकोण कखग त्रिकोण घचक्क पर इस प्रकार से धरा जाय कि बिन्दु ख बिन्दु च पर हो और रेखा खग रेखा चक्क पर पड़े तो क्योंकि खग समान चक्क के है क. अर्थ.

इसलिये बिन्दु ग बिन्दु क्क पर होगा ॥ तो फिर जब खग चक्क पर पड़ेगा तो सिद्ध हो है कि खक कग चघ घक्क पर पृथक् पृथक् होंगे क्योंकि यदि ऐसा न हो तो ऐसी दशा में होंगे जैसे चज जक्क तो फिर एक आधार पर और उस के एक ही ओर दो त्रिकोण ऐसे होंगे जिन के सीमावर्त्ती बाहु समान हैं परन्तु यह असम्भव है । १. ७.

इसलिये बाहु खक कग बाहु चघ घक्क पर स्थित हैं अर्थात् कोण खकग कोण चघक्क के ऊपर स्थित है और इस लिये उसके समान है स्व-८

नोट – इस साध्य में एक त्रिकोण के तीनों बाहु दूसरे त्रिकोण के तीनों बाहुओं के पृथक् २ समान हैं और इससे यह

सिद्ध किया गया है कि एक त्रिकोण दूसरे का आच्छादन करता है ॥ इससे हम निम्नलिखित महासिद्धांत निकालते हैं ॥ क्यू. इ. डी

सिद्धांत – यदि दो त्रिकोणों में एक के तीन बाहु दूसरे के तीन बाहुओं के पृथक पृथक समान हों तो त्रिकोण सब प्रकार से समान होंगे ।

साध्य ८ की निम्नलिखित सिद्धि ध्यान देने योग्य है क्योंकि साध्य ७ से यह स्वतन्त्र है जो नव छात्रों को प्रायः कठिन जान पड़ता है ॥

साध्य ८ द्वितीय प्रमाण ।

त्रिकोण कखग घचछ में मानलो कि बाहु कख समान घच के है और कग समान घछ के है और आधार खग आधार चछ के समान है तो कोण खकग कोण चघछ के समान होगा ॥

त्रिकोण कखग को त्रिकोण घचछ पर इस प्रकार से धरो कि बिन्दु ख बिन्दु च पर हो और रेखा खग रेखा चछ पर हो और बिन्दु क आधार की दूसरी ओर घ से दूर स्थित हो ॥ तो ग बिन्दु छ पर पड़ेगा क्योंकि खग और चछ समान हैं ॥ मानलो कि कु चछ नई अवस्था त्रिकोण कखग की है यदि घछ छकु एक सीध में न हों और न घच चकु एक सीध में हों तो घकु को जोड़ दो ॥

दशा-१ जब घकु चछ को काटे ॥ तो क्योंकि चघ चकु समान हैं इसलिये कोण चघकु कोण चकुघ के समान है १. ५.

फिर क्योंकि छघ छकु समान हैं इसलिये कोण छघकु कोण छकुघ के समान है १. ५.

इसलिये सकल कोण चघछ कोण चकुछ के समान है अर्थात् सकल कोण चघछ कोण खकग के समान है

दो दशा और हैं जो इसी प्रकार से सिद्ध हो सकती हैं

दशा २ जब घकु चछ से बढ़ा ये जानेपर मिलता है

दशा २ जब दो बाहु जैसे घछ छकु एक सीध में हैं

साध्य ९ वस्तूपपाद्य ।

एक दिये हुवे कोण के दो बराबर भाग करो खकग दिया हुआ कोण है उसके दो बराबर भाग करो ।

बनावट — कख में कोई बिन्दु घ लो और कग में से कच समान कघ के काटो घच को जोड़ दो ॥ १. ३.

और घच पर उस ओर जो क से दूर है समत्रिबाहु त्रिकोण घचक्क बनाओ १. १.

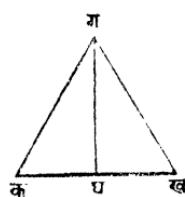
कक्क को जोड़ दो ॥

तो सीधी रेखा कक्क कोण खकग को दो समान भाग करेगी ॥

प्रमाण — क्योंकि दो त्रिकोण घकक्क चकक्क में घक समान चक के बनाया गया है और कक्क दोनों में सामाना है और तीसरा बाहु घक्क तीसरे बाहु चक्क के समान है । संज्ञा १६.

इस लिये कोण घकक्क कोण चकक्क के समान है १. ८.

इसलिये सीधी रेखा कक्क दिये हुवे कोण खकग के दो बराबर भाग करती है ॥

अभ्यास ।

१. यदि ऊपर के चित्र में समत्रिबाहु त्रिकोण घचक्क ऊपर की ओर बनाया जाय तो क्या नई दशा होगी और किस दशा में बनावट ठीक न पड़ेगी ॥

२. उसी चित्र में सिद्ध करो कि कक्क कोण घक्कच के दो बराबर भाग करता है ॥

३. किसी कोण के चार बराबर भाग करो ॥

साध्य १० वस्तूपपाद्य ।

दी हुई परिमित सीधी रेखा के दो बराबर भाग करो कख दी हुई रेखा है । इसके दो बराबर भाग करो ।

बनावट — कख पर कखग समत्रिबाहु त्रिकोण बनाओ १. १

और कोण कगख के सीधी रेखा गघ से बराबर भाग करो १. ९

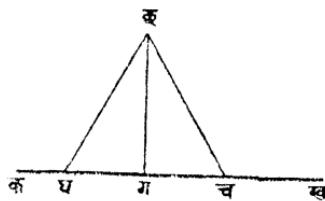
जो कख से घ पर मिलती है तो कख के घ बिन्दु पर दो समान भाग होंगे

प्रमाण — क्योंकि त्रिकोण कगघ खगघ में कग खक समान हैं संज्ञा १९.

और गघ दोनों में समान है और अन्तर्गत कोण कगघ अन्तर्गत कोण खगघ के समान है १. ९

इसलिये दोनों त्रिकोण सब प्रकार से समान हैं

इसलिये आधार कघ आधार खघ के समान है १. ४.

इसलिये रेखा कख के बिन्दु घ पर दो समान भाग हुये

अभ्यास ।

१. सिद्ध करो कि वह सीधी रेखा जो किसी समद्विबाहु त्रिकोण के शीर्ष कोण के दो सम भाग करती है वह आधार के भी दो सम भाग करती है ॥

२. दिये हुवे आधार पर ऐसा समद्विबाहु त्रिकोण बनाओ कि उसके समबाहु का जोड़ किसी दी हुई सीधी रेखा के समान हो ॥

साध्य ११ वस्तूपपाद्य ।

दी हुई सीधी रेखा में दिये हुवे बिन्दु से एक ऐसी सीधी रेखा खींचो जो दी हुई रेखा के साथ समकोण बनावे ॥

कख दी हुई रेखा है और ग कख में दिया हुवा बिन्दु है ग बिन्दु से एक सीधी रेखा ऐसी खींचो जो कख के साथ समकोण बनावे ॥

बनावट — कग में कोई बिन्दु घलो और गख में गच गघ के समान काटो   १. ३.

घच पर समत्रिबाहु त्रिकोण घकच बनाओ ॥   १. १.

गक को मिला दो

तो गक सीधी रेखा कख के साथ समकोण बनावेगी ॥

प्रमाण — क्योंकि त्रिकोण घगक चगक में घग चग के समान बनाया गया है और गक दोनो में सामान्य है और तीसरा बाहु घक तीसरे बाहु चक के समान है   मंत्र. १६.

इसलिये कोण घगक कोण चगक के समान है   १. ८.

और यह कोण आसन्न कोण है

परन्तु जब एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा के ऊपर खड़ी होकर दोनों आसन्न कोणों को परस्पर समान बनावे तो इनमें से प्रत्येक कोण समकोण कहाता है ।   मंत्र. ९.

इसलिये प्रत्येक कोण घगक चगक समकोण है

इसलिये गक कख के साथ समकोण बनाती है और वह बिन्दु ग से खींची गई है ॥

अभ्यास।

ऊपर के साध्य के चित्र में सिद्ध करो कि क्रग में या बढ़े हुवे क्रग में प्रत्येक बिन्दु घ और च से समान दूरी पर हैं॥

साध्य १२ वस्तूपपाद्य।

दी हुई अपरिमित सीधी रेखा पर उसके बाहर स्थित बिन्दु से एक लम्ब डालो॥

कख दी हुई रेखा है जिस को दोनों ओर बढ़ा सकते हैं और ग उसके बाहर बिन्दु है ग से कख पर एक लम्ब डालो॥

बनावट—कख के उस ओर जो ग से दूर है कोई बिन्दु घ लो और ग केन्द्र के साथ गघ को व्यासार्द्ध मान कर वृत्त क्रघज खींचो जो कख को क्र और ज पर मिले। अनु. ३.

क्रज के झ पर दो बराबर भाग करो १. १०.

गझ को मिला दो तो गझ कख पर लम्ब होगा गक्र और गज को जोड़ दो॥

प्रमाण—तो क्योंकि त्रिकोण क्रझग जझग में क्रझ जझ के समान बनाया गया और झग दोनो में सामान्य है और तीसरा बाहु गक्र तीसरे बाहु गज के समान है क्योंकि वे दोनों वृत्त क्रघज के व्यासार्द्ध हैं। संज्ञा १५.

इसलिये आसन्न कोण गझक्र आसन्न कोण गझज के समान है। १. ८.

परन्तु जब एक सीधी रेखा दूसरी पर खड़ी हो कर आसन्न कोणों को परस्पर समान बनावे तो उनमें से प्रत्येक कोण समकोण कहाता है और

सीधी रेखा जो दूसरी पर खड़ी होती है उसका लम्ब कहाती है संज्ञा. १.

इसलिये गभ कख पर लम्ब है और बिन्दु ग से खींची गई है कृ. इ. ए५

नोट – दी हुई रेखा अपरिमित होनी चाहिये अर्थात् वह दोनों ओर बढ़ाने के योग्य होनी चाहिये इसलिये कि वृत्त कघज अवश्य उस को दो बिन्दुओं पर काटे॥

अभ्यास साध्य १ से १२ तक पर।

१. सिद्ध करो कि वह सीधी रेखा जो किसी समद्विबाहु त्रिकोण के शीर्ष को आधार के मध्यस्थान से मिलावे आधार पर लम्ब होगी॥

२. सिद्ध करो कि वे सीधी रेखायें जो किसी समद्विबाहु त्रिकोण के आधार के सिरों को सामने की बाहुओं के मध्य बिन्दुओं से मिलावें परस्पर समानहोंगी॥

३. किसी समद्विबाहु त्रिकोण के आधार में दो बिन्दु उसके दोनों सिरों से समदूरी पर हैं सिद्ध करो कि वे शीर्ष से भी समदूरी पर होंगे॥

४. यदि किसी चतुर्भुज के सामने के बाहु समान हों तो सामने के कोण भी समान होंगे॥

५. कोई दो समद्विबाहु त्रिकोण सकख रकख एक ही आधार कख पर स्थित हैं सिद्ध करो कि कोण सकर कोण सखर के समान है और कोण कसर कोण खसर के समान है॥

६. सिद्ध करो कि विषम कोण सम चतुर्भुज के सामने के कोण उसके कर्ण से दो बराबर भागों में बांटे जाते हैं॥

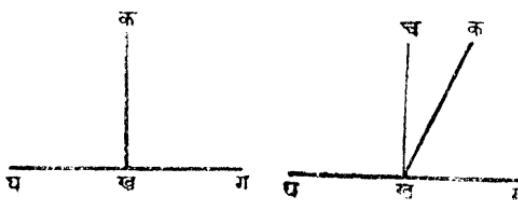
७. सिद्ध करो कि सीधी रेखायें जो किसी समद्विबाहु त्रिकोण के आधार स्थित कोणों के दो समभाग करती हैं आधार के साथ एक समद्विबाहु त्रिकोण बनाती हैं॥

८. कखग एक समद्विबाहु त्रिकोण है जिस में कख समान कग के है और सीधी रेखायें जो ख और ग स्थित कोण के दो समभाग करती हैं त पर मिलती हैं सिद्ध करो कि तक कोण खकग के दो सम भाग करती है ॥

९. सिद्ध करो कि समत्रिबाहु त्रिकोण के बाहुओं के मध्य स्थानों के मिलाने से जो त्रिकोण बनता है वह समत्रिबाहु होता है ॥

१०. किसी समद्विबाहु त्रिकोण खकग के समबाहु खक गक शीर्ष क से परे बिन्दु चछ तक बढ़ाये जाते हैं इस प्रकार से कि कच और कछ समान हैं और छखचग मिलाये जाते हैं सिद्ध करो कि छख समान चग के हैं ॥

११. सिद्ध करो कि विषमकोण समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को दो बराबर भागों में बांटते हैं और एक दूसरे के साथ समकोण बनाते हैं ॥

१२. किसी समद्विबाहु त्रिकोण कखग के समबाहु कख कग में दो बिन्दु सर इस प्रकार से लिये गये हैं कि कस कर समान हैं और गस खर परस्पर त पर काटते हुवे खींचे हुये हैं तो सिद्ध करो कि

(१) त्रिकोण खतग समद्विबाहु है ॥

(२) कत शीर्ष कोण खकग के दो समभाग करता है ॥

(३) कत यदि बढ़ाया जाये तो खग के साथ समकोण बनाकर उसके दो समभाग करता है ॥

१३. एक समद्विबाहु त्रिकोण बनाओ जिसके आधार और शीर्ष से आधार पर लम्ब की लम्बाई दी हुई है ॥

१४. दी हुई सीधी रेखा में एक बिन्दु मालूम करो जो दिये हुये दो बिन्दुओं से समदूरी पर हो ॥ यह किस दशा में असम्भव है ?

साध्य १३ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा के ऊपर खड़ी हो तो आसन्न कोण या तो दो समकोण होंगे या मिलकर दो समकोण के बराबर होंगे ॥

सीधी रेखा कख सीधी रेखा घग पर खड़ी है तो आसन्न कोण घखक कखग या तो दो समकोण होंगे या मिल कर दो समकोण के समान होंगे ॥

दशा १ यदि कोण घखक कोण कखग के समान है तो उनमें प्रत्येक समकोण है संज्ञा. ७.

दशा २ परन्तु यदि कोण घखक कोण कखग के समान न हो तो ख से खच घग के साथ समकोण बनाता हुवा खींचो ॥

प्रमाण – अब कोण घखक कोण घखच चखक से मिलकर बना है इन दो समानों में कोण कखग जोड़ो तो कोण घखक कखग मिलकर तीन कोण घखच चखक कखग के समान हैं स्व. २

फिर कोण चखग दो कोण चखक कखग से मिलकर बना है इन दो समानों में कोण घखच जोड़ो तो दो कोण घखच चखग मिलकर तीन कोण घखच चखक कखग के समान हैं स्व. २.

परन्तु दो कोण घखक कखग उन ही तीन कोणों के समान सिद्ध किये जा चुके हैं इसलिये कोण घखक कखग मिलकर कोण घखच चखग के समान हैं स्व. १.

परन्तु कोण घखच चखग दो समकोण हैं बनावट

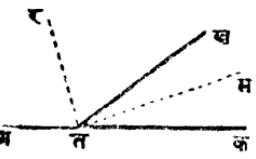
इसलिये कोण घखक कखग मिलकर दो समकोण के समान हैं ॥

संज्ञा प्रकरण ।

१. किसी न्यून कोण का पूरक वह कोण है जिसके साथ मिलकर वह एक समकोण के समान होता है ॥

इस प्रकार से दो कोण परस्पर पूरक कहाते हैं जब उन का जोड़ एक समकोण के समान हो ॥

२. किसी कोण का उत्तर खंड वह कोण है जिसके साथ मिलकर वह दो समकोण के समान होता है ॥

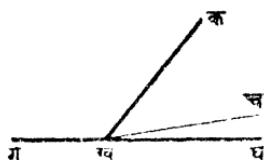
दो कोण परस्पर उत्तर खंड कहाते हैं जब उनका जोड़ मिलकर दो समकोण के समान हो

सिद्धांत – कोण जो एक ही कोण के पूरक या उत्तर खंड होते है परस्पर समान होते हैं ॥

अभ्यास ।

१. किसी त्रिकोण की एक बाहु को दोनों ओर बढ़ाने से जो दो बहिःकोण बनते हैं यदि परस्पर समान हों तो सिद्ध करो कि त्रिकोण-समद्विबाहु है ॥

२. आसन्न कोण जो एक सीधी रेखा दूसरे के साथ बनाती हैं उनके दो समभाग करने वाली सीधी रेखाओं का अन्तर्गत कोण समकोण होता है ॥

नोट – आसन्न चित्र में कतख दिया हुवा कोण है और उसका एक बाहु क तग तक बढाया गया है आसन्न कोण कतख खतग के तम तर दो सम २ भाग करते हैं तो तम तर कोण कतख के भीतर और बाहरदो समभाग करने वाले पृथक् पृथक् कहाते हैं ॥

इसलिये अभ्यास द्वितीय की प्रतिज्ञा इस प्रकार से है । किसी कोण

को भीतर बाहर दो समभाग करने वाली रेखाओं का अन्तर्गत कोण समकोण होता है ॥

३. सिद्ध करो कि कोण कतम और गतर एक दूसरे के पूरक हैं ॥

४. सिद्ध करो कि कोण खतम कोण गतम का उत्तर खंड है और कोण कतर का कोण खतर उत्तर खंड है ॥

साध्य १४ प्रमेयोपपाद्य।

यदि किसी सीधी रेखा में एक बिन्दु पर दो और सीधी रेखायें उसके दोनों ओर से मिलकर आसन्न कोण को मिलाकर दो समकोण के समान बनावें तो यह दोनों रेखायें एक ही सीध में स्थित होगीं ॥

सीधी रेखा कख में बिन्दु ख पर दो सीधी और रेखायें खग खघ उसके दोनों ओर से आकर आसन्न कोण कखग कखघ को मिलाकर दो समकोण के समान बनाती हैं तो खघ खग दोनो एक ही सीध में होंगे ॥
प्रमाण – क्योंकि यदि खघ और खग एक ही सीध में न हों और सम्भव हो तो मानलो कि खच खग एक ही सीध में हैं ॥

तो क्योंकि कख सीधी रेखा गखच से मिलती है ॥

इसलिये आसन्न कोण गखक कखच मिलकर दो समकोण के समान हैं १. १३.

परन्तु कोण गखक कखघ मिलकर दो समकोण के समान हैं क. अर्थ

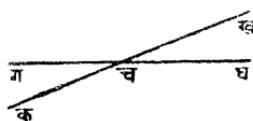
इसलिये कोण गखक कखच मिलकर कोण गखक कखघ के समान हैं स्व. ११.

इन दो समान पदार्थों में से सामान्य कोण गचक निकाल डालो तो शेष कोण कखच शेष कोण कखघ के समान है ॥

अर्थात् सकल भाग के समान है जो असम्भव है ॥

इसलिये खच खग एक ही सीध में नहीं हैं ॥

और इसी प्रकार से सिद्ध हो सकता है कि खघ को छोड़ और कोई रेखा खग के सीध में नहीं है ॥

इसलिये खघ खग एक ही सीध में हैं ॥

अभ्यास ।

१ कखगघ एक विषम कोण समचतुर्भुज है और कर्ण कग के त पर दो समभाग होते हैं यदि त कोण विन्दु ख और घ से मिलाया जाय तो सिद्ध करो कि तख तघ एक ही सीध में हैं ॥

दर्शनीय – जब दो सीधी रेखायें एक दूसरे को एक विन्दु पर काटती हैं तो चार कोण बनते हैं और कोई दो कोण जो आसन्न न हों परस्पर ऊर्ध्व अधर सामने के कोण कहाते हैं ॥

साध्य १५ प्रमेयोपपाद्य ।

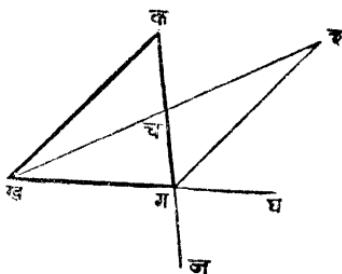
यदि दो सीधी रेखा एक दूसरे को काटें तो ऊर्ध्व अधर सामने के कोण समान होंगे ॥

दो सीधी रेखायें कख गघ एक दूसरे को विन्दु च पर काटती हैं तो कोण कचग कोण घचख के समान होगा और कोण गचख कोण कचघ के समान होगा ॥

प्रमाण – क्योंकि कच गघ के साथ आसन्न कोण गचक कचघ बनाती है इसलिये ये दो कोण मिलकर दो समकोण के समान होंगे १, १३.

और फिर क्योंकि घच कख के साथ आसन्न कोण कचघ घचख बनाती है इसलिये ये दो कोण मिलकर दो समकोण के समान हैं १. १३.

इसलिये कोण गचक कचघ मिलकर कोण कचघ घचख के समान हैं इन समान पदार्थों में से सामान्य कोण कचघ निकाल डालो ॥

तो शेष कोण गचक शेष कोण घचख के समान है स्व. ३

इसी प्रकार से सिद्ध कर सकते हैं कि कोण गचख कोण घचक के समान है ॥

सिद्धांत १ इससे यह सिद्ध होता है कि यदि दो सीधी रेखायें एक दूसरे को काटें तो उस बिन्दु पर जहां वह परस्पर काटती हैं सब कोण मिलकर चार समकोण के समान होंगे ॥

सिद्धांत २ इसलिये जब बहुत सी सीधी रेखायें एक बिन्दु पर मिलें तो जितने कोण उस बिन्दु पर बनेंगे सब मिलकर चार समकोणों के समान होंगे ॥

साध्य १६ प्रमेयोपपाद्य।

यदि किसी त्रिकोण का एक बाहु बढ़ाया जाय तो बहिःकोण सामने के प्रत्येक अन्तःकोण से बड़ा होगा ॥

कखग एक त्रिकोण है जिसका बाहु खग घ तक बढ़ाया गया है तो बहिःकोण कगघ प्रत्येक सामने के अन्तः कोण गखक खकग से बड़ा होगा ॥

बनावट — कग के च पर दो समभाग करो १. १०

खच को मिला दो और उसको छ तक बढ़ाओ और चछ को खच के समान बनाओ १. ३.

छग को मिलाओ

प्रमाण — तो त्रिकोण कचख गचछ में कच समान गच के बनाया गया है और चख समान चछ के बनाया गया है ॥

और ऊर्द्ध अधर सामने के कोण कचख गचछ परस्पर समान हैं ॥ १. १५.

इसलिये त्रिकोण कचख गचछ परस्पर समान सब प्रकार से हैं ॥ १. ४.

इसलिये कोण खकच कोण चगछ के समान है ॥

परन्तु कोण चगघ अपने भाग कोण चगछ से बड़ा है ॥

इसलिये कोण चगघ कोण खकच से भी बड़ा है ॥

अर्थात् कोण कगघ कोण खकग से बड़ा है ॥

इसी प्रकार यदि खग के दो समभाग करें और कग को ज तक बढ़ावें तो सिद्ध कर सकते हैं कि कोण खगज कोण कखग से बड़ा है ॥ परन्तु कोण खगज कोण कगघ के समान है १. १५.

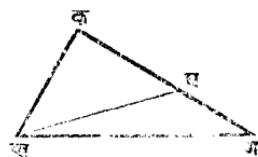
इसलिये कोण कगघ कोण कखग से भी बड़ा है ॥

साध्य १७ प्रमेयोपपाद्य ।

किसी त्रिकोण के कोई दो कोण मिलकर दो समकोण से कम होते हैं ॥

कखग एक त्रिकोण है तो उसके दो कोण मिलकर दो समकोण से कम होंगे यथा कखग कगख मिलकर दो समकोण से कम होंगे ॥

दा
बनावट बाहु खग को ● तक बढ़ाओ
प्रमाण — तो क्योंकि कगघ त्रिकोण कखग का बाह्य कोण है ॥
इसलिये वह सामने के अन्तः कोण कखग से बड़ा है १. १६
इन दोनों में कोण कगख जोड़ो
तो कोण कगघ कगख मिलकर कोण कखग कगख से बड़े हैं स्व. ४.
परन्तु आसन्न कोण कगघ कगख मिलकर दो समकोणों के समान है १. १३.
इसलिये कोण कखग कगख मिलकर दो समकोण से कम हैं
इसी प्रकार से सिद्ध कर सकते हैं कि कोण खकग कगख तथा कोण गकख कखग मिलकर दो समकोण से कम हैं ॥
नोट — इस साध्य से सिद्ध होता है कि प्रत्येक त्रिकोण में कम से कम दो न्यून कोण होने चाहियें क्योंकि यदि एक कोण सम या अधिक कोण हो तो शेष कोणों में से प्रत्येक को एक समकोण से छोटा होना चाहिये ॥

अभ्यास ।

१. इस साध्य की प्रतिज्ञा इस प्रकार कहो कि स्वयं सिद्ध १२ का विरुद्धावयव जान पड़े ॥

२. यदि किसी त्रिकोण का एक बाहु दोनों ओर बढ़ाया जाय तो दोनों बाह्य कोण मिलकर दो समकोण से बड़े होंगे ॥

३. प्रत्येक शीर्ष को द्वारो २ से सामने के बाहु में किसी बिन्दु से मिलाकर साध्य १७ को सिद्ध करो ॥

साध्य १८ प्रमेयोपपाद्य।

यदि किसी त्रिकोण का एक बाहु दूसरे से बड़ा हो तो बड़े बाहु के सामने का कोण छोटे बाहु के सामने के कोण से बड़ा होगा॥

कखग त्रिकोण में बाहु कग बाहु कख से बड़ा है तो कोण कखग कोण कगख से बड़ा होगा॥

बनावट – कग बड़े में से कघ छोटे कख के समान एक भाग काटो १. ३.

खघ को मिला दो.

फिर त्रिकोण कखघ में कख कघ परस्पर समान हैं॥

इसलिये कोण कखघ और कघख परस्पर समान हैं १. ५.

परन्तु त्रिकोण खघग का बहिःकोण कघख सामने के अन्तःकोण घगख से बड़ा है अर्थात् कगख से बड़ा है १. १६.

इसलिये कोण कखघ भी कोण कगख से बड़ा है

तो कोण कखग कोण कगख से और भी बड़ा है॥

यूक्लिड ने इस साध्य को प्रतिज्ञा इस प्रकार से कही है प्रत्येक त्रिकोण के बड़े बाहु के सामने का कोण बड़ा होता है॥

[इस प्रकार की प्रतिज्ञा प्रायःनये छात्रों के लिये कठिन होती है जो नहीं जान सकते कि क्या कल्पित अर्थ है और क्या सिद्ध करना है]

[अभ्यास के लिये देखो पृष्ठ –]

साध्य १९ प्रमेयोपपाद्य।

यदि किसी त्रिकोण का एक कोण दूसरे कोण से बड़ा हो तो बड़े कोण के सामने का बाहु छोटे कोण के सामने के बाहु से बड़ा होगा॥

कखग त्रिकोण में कोण कखग कोण कगख से बड़ा है तो बाहु कग बाहु कख से बड़ा होगा॥

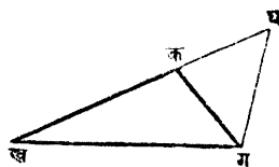
प्रमाण — क्योंकि यदि कग कख से बड़ा न हो तो वह या तो उसके समान होगा या उससे छोटा होगा परन्तु कग कख के समान नहीं क्योंकि फिर कोण कखग कोण कगख के समान होगा १. ५.

परन्तु ऐसा नहीं है क. अर्थ.

और न कग कख से छोटा है क्योंकि फिर कोण कखग कोण कगख से छोटा होगा १. १८.

परन्तु ऐसा नहीं है क. अर्थ.

इसलिये न कग कख से छोटा है और न उसके समाम है अर्थात् कग कख से बड़ा है॥

नोट — [इस प्रकार की सिद्धि की रीति जो इस साध्य में काम आई है विपक्षहरण सिद्धि कहाती है ये उन दशाओं में लगाई जातीं हैं जहां कई परस्पर विरुद्ध अनुमानों में एक अवश्य सत्य होता है और इसका कार्य्य यह है कि सिवाय एक अनुमान के और सब को क्रम से असत्य सिद्ध करती है इसलिये शेष अनुमान की सत्यता जान पड़ती है]

यूक्लिड इस साध्य की प्रतिज्ञा इस प्रकार वर्णन करता है

प्रत्येक त्रिकोण के बड़े कोण के सामने का बाहु बड़ा होता है

[अभ्यास के लिये देखो पत्र]

साध्य २० प्रमेयोपपाद्य ।

किसी त्रिकोण के कोई दो बाहु मिलकर तीसरे बाहु से बड़े होते हैं ॥

कखग एक त्रिकोण है तो उसके कोई दो बाहु मिलकर तीसरे से बड़े होंगे अर्थात् खक कग मिलकर गख से बड़े होंगे और कख गख मिलकर कग से बड़े होंगे और कग गख मिलकर खक से बड़े होंगे ॥

बनावट — खक को विन्दु घ तक बढ़ाओ और कघ को कग के समान बनाओ 1. ३.

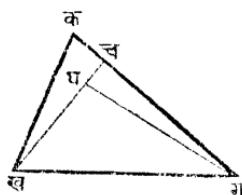
गघ को जोड़ दो ॥

प्रमाण — फिर त्रिकोण कघग में क्योंकि कघ कग परस्पर समान हैं इसलिये कोण कगघ कोण कघग के समान है १. ५.

परन्तु कोण खगघ कोण कगघ से बड़ा है स्व. ६.

इसलिये कोण खगघ कोण कघग अर्थात् कोण खघग से बड़ा है ॥

और क्योंकि त्रिकोण खगघ में कोण खगघ कोण खघग से बड़ा सिद्ध किया गया है इसलिये बाहु खघ बाहु गख से बड़ा है १. १९.

परन्तु खक कग मिलकर खघ के समान हैं ॥

इसलिये खक कग मिलकर खग से बड़े हैं ॥

इसी प्रकार सिद्ध हो सकता है कि कग गख मिलकर खक से बड़े हैं और गख खक मिलकर कग से बड़े हैं ॥

[अभ्यास के लिये देखो पत्र]

साध्य २१ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि किसी त्रिकोण के किसी भुज के सिरों से सीधी रेखा त्रिकोण के भीतर किसी बिन्दु तक खींची जाय तो यह दोनो सीधी रेखा मिलकर त्रिकोण के दो और बाहु से छोटी होंगी परन्तु अन्तर्गत कोण बड़ा होगा ॥

कखग एक त्रिकोण है और भुज खग के सिरों ख और ग से दो सीधी रेखाएं खघ गघ बिन्दु घ तक त्रिकोण के भीतर खींची गई हैं तो

(१) खघ गघ मिलकर खक कग से छोटी होंगी और

(२) कोण खघग कोण खकग से बड़ा होगा

बनावट — खघ को बढ़ाओ कि कग से च पर मिले

प्रमाण १ — त्रिकोण खकच में दो बाहु खक कच मिलकर तीसरे बाहु खच से बड़े हैं १. २०.

इन दोनों में चग जोड़ दो

तो खक कग मिलकर खच चग से बड़े होंगे स्व. ४.

फिर त्रिकोण घचग में दो बाहु घच चग मिलकर घग से बड़े हैं १. २०.

इन दोनो में खक जोड़ दो तो खच चग मिलकर खघ घग से बड़े हैं ॥ परन्तु ये सिद्ध हो गया है कि खक कग मिलकर खच चग से बड़े हैं तो खक कग मिलकर खघ घग से और भी अधिक बड़े हैं ॥

२. फिर त्रिकोण घचग का बहिःकोण खघग सामने के अन्तःकोण घचग से बड़ा है १. १६

और त्रिकोण खकच का बहिःकोण घचग सामने के अन्तःकोण खकच से अर्थात् खकग से बड़ा है १. १६

तो कोण खघग कोण खकग से और भी अधिक बड़ा है ॥

अभ्यास।

साध्य १८-१९ पर।

१. समकोण त्रिकोण का कर्ण उस की तीनों बाहुओं में सब से बड़ा होता है॥

२. यदि किसी त्रिकोण के दो कोण परस्पर समान हों तो उनके सामने के बाहु भी समान होंगे साध्य ६॥ इसको साध्य १८ के फल द्वारा वक्र रीतिसे सिद्ध करो॥

३. किसी समद्विबाहु त्रिकोण कखग के आधार खग को किसी बिन्दु घतक बढ़ाते हैं सिद्ध करो कि कघ प्रत्येक समान बाहु से बड़ा है॥

४. यदि किसी चतुर्भुज के सबसे बड़े और सबसे छोटे बाहु आमने सामने स्थित हों तो सबसे छोटे बाहु के आसन्न कोण अपने सामने के कोण से पृथक् पृथक् बड़े होंगे॥

५. यदि किसी त्रिकोण कखग में कग कख से बड़ा नहो तो सिद्ध करो कि कोई सीधी रेखा जो शीर्ष क से खींची जाय और आधार खग पर समाप्त हो कख से छोटी होगी॥

६. कखग एक त्रिकोण है जिस में तख तग पृथक् पृथक् कोण कखग कगख के दो समभाग करती हैं सिद्ध करो कि यदि कख कग से बड़ी हो तो तख तग से बड़ी होगी॥

साध्य २० पर।

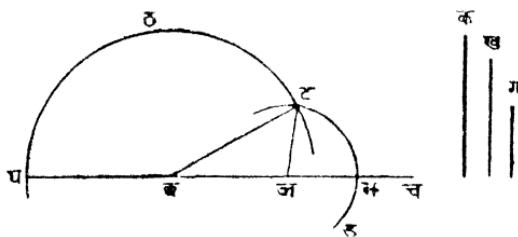
७. किसी त्रिकोण के दो बाहु का अन्तर उसके तीसरे बाहु से छोटा होता है॥

८. यदि किसी चतुर्भुज में दो सामने के बाहु जो समानान्तर नहीं हैं बढ़ा कर मिलाये जायं तो सिद्ध करो कि दो त्रिकोण के बाहु का जोड़ जो इस प्रकार से बनेंगे चतुर्भुज के बाहु के जोड़ से अधिक होगा॥

९. किसी त्रिकोण के तीनों कोणों से किसी बिन्दु की दूरी का जोड़ उसके बाहु के आधे जोड़ से अधिक होता है॥

१०. किसी चतुर्भुज के बाहु का जोड़ उसके कर्णों के जोड़ से अधिक होता है ॥

११. साध्य २० को किसी कोण के दो समभाग करने वाली रेखा को सामने के बाहुसे मिलाकर सिद्ध करो ॥

साध्य २१ पर।

१२. साध्य २१ में सिद्ध करो कि कोण खघग कोण खकग से बड़ा है और इसको कघ को जोड़ने और आधार तक बढ़ाके सिद्ध करो ॥

१३. किसी त्रिकोण के तीनों कोणों की किसी बिन्दु से दूरी का जोड़ जो त्रिकोण के भीतर हो उसके बाहुके जोड़ से कम होता है ॥

साध्य २२ वस्तूपपाद्य।

एक त्रिकोण ऐसा बनाओ जिस के बाहु पृथक् पृथक् दी हुई तीन रेखाओं के समान हों जिन में से कोई दो मिलकर तीसरी से बड़ी हैं ॥

कखग दी हुई तीन रेखा हैं जिस में दो मिलकर तीसरी से बड़ी हैं क ऐसा त्रिकोण बनाओ जिसके बाहु कखग के पृथक् पृथक् समान हों ॥

बनावट – एक सीधी रेखा घच लो जो घ पर समाप्त होती है परन्तु च की ओर अपरिमित है घक को क के समान बनाओ कज को ख के समान बनाओ और जभ को ग के समान बनाओ १. ३.

केन्द्र क से घक को आसार्द्ध मानकर वृत्त ठघट खींचो केन्द्र ज जभ से को आसार्द्ध मानकर वृत्त डभट खींचो जो पहिले वृत्त को बिन्दु ट पर काटता है ॥ कट|जट को जोड़ दो ॥

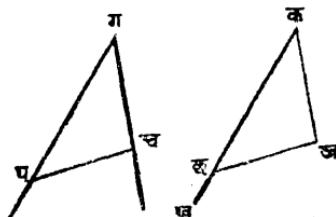
तो त्रिकोण टकज के बाहु कखग के समान होंगे ॥

प्रमाण — क्योंकि क वृत्त घठट का केन्द्र है इसलिये कट समान कघ के है संज्ञा. ११.

परन्तु घक क के समान बनाया गया है इसलिये कट समान क के है ॥ फिर क्योंकि ज वृत्त डझट का केन्द्र है

इसलिये जट समान जझ के है संज्ञा. ११.

परन्तु जझ समान ग के है इसलिये जट समान ग के है

और कज समान ख के बनाया गया है

इसलिये त्रिकोण टकज के बाहु टक कज जट पृथक् पृथक् समान खग के हैं ॥

अभ्यास ।

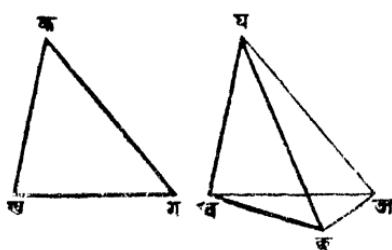
दिये हुये आधार पर ऐसा त्रिकोण बनाओ जिस के शेष बाहु दी हुई दो सीधी रेखाओं के समान हों ॥ ये भी सिद्ध करो कि बनावट न बनेगी जब कि एक रेखा शेष दो रेखाओं के जोड़ से बड़ी हो ॥

साध्य २३ वस्तूपपाद्य ।

दी हुई सीधी रेखा में दिये हुए बिन्दु पर एक कोण दिये हुए कोण के समान बनाओ ॥

कख दी हुई सीधी रेखा है और उस में क दिया हुआ बिन्दु है और घगच दिया हुआ कोण है बिन्दु क से ऐसी सीधी रेखा खींचो जो कख के साथ दिये हुए कोण घगच के समान कोण बनाए ॥

बनावट – गघ गच में कोई बिन्दु घ और च लो घच को जोड़ दो कख में से कक समान गघ के काटो १. ३.

और कक पर त्रिकोण ककज बनाओ जिसके शेष बाहु कज जक पृथक् पृथक् गच चघ के समान हों १. २२.

तो कोण ककज कोण घगच के समान होगा

प्रमाण – क्योंकि त्रिकोण ककज घगच में कक समान घग के है

और कज समान गच के हैं और आधार कज आधार घच के समान है

बनावट – इसलिये कोण ककज कोण घगच के है १. ८.

अर्थात् कज कक के साथ बिन्दु क पर एक कोण बनाती है

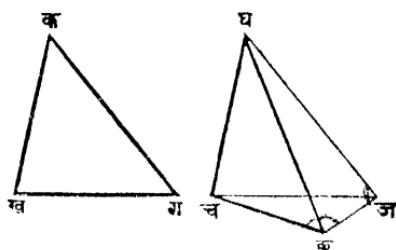
जो दिये हुवे कोण घगच के समान है

साध्य २४ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि दो त्रिकोण में एक त्रिकोण के दो बाहु दूसरे त्रिकोण के दो बाहुओं के पृथक् पृथक् समान हों परन्तु एक त्रिकोण के दोनों बाहुओं का अन्तर्गत कोण दूसरे के सदृश बाहुओं के अन्तर्गत कोण से बड़ा हो तो आधार उस त्रिकोण का जिसका अन्तर्गत कोण बड़ा है दूसरे के आधार से बड़ा होगा ॥

कखग घचक दो त्रिकोण हैं जिनमें दो बाहु कख कग दो बाहु घच घक के पृथक् पृथक् समान हैं ॥ परन्तु कोण खकग कोण चघक से बड़ा है ॥

तो आधार खग आधार चक से बड़ा होगा ॥

बनावट – बिन्दु घ पर रेखा चघ में और उसके उसी ओर जिस ओर घक्ष है कोण चघज कोण खकग के समान बनाओ १. २३.

घज को घक्ष या कग के समान बनाओ १. ३.

और चज जक्ष को जोड़ दो

प्रमाण – फिर त्रिकोण खकग चघज में खक समान चघ के है क. अर्थ और कग समान घज है ।

और अन्तर्गत कोण खकग अन्तर्गत कोण चघज के समान है बनावट

इसलिये त्रिकोण खकग त्रिकोण चघज के सब प्रकार से समान है १. ४.

इसलिये आधार खग आधार चज के समान है ॥

फिर त्रिकोण क्षघज में घज समान घक्ष के है इसलिये कोण घक्षज कोण घजक्ष के समान है १. ५.

परन्तु कोण घजक्ष कोण चजक्ष से बड़ा है इसलिये कोण घक्षज भी कोण चजक्ष से बड़ा है तो कोण चक्षज कोण चजक्ष से और भी बड़ा है ॥ और त्रिकोण चक्षज में कोण चक्षज कोण चजक्ष से बड़ा है इसलिये बाहु चज बाहु चक्ष से बड़ा है १. १९.

परन्तु चज समान खग के सिद्ध किया गया है इसलिये खग बड़ा है चक्ष से ॥

* दो बाहु घच घक्ष में मान लो कि घच घक्ष से बड़ा नहीं है ॥

नोट देखो दूसरे पत्रपर

* इस नियम का सिमृसन साहब ने इस में इसलिये प्रवेश किया है कि पूरी बनावट में बिन्दु क्ष चज के नीचे पड़े अर्थात् स्थित हो ॥ इस नियम के विना तीन दशाओं का विचार करना पड़ेगा क्योंकि सम्भव है कि बिन्दु क्ष चज के ऊपर या चज पर या उसके नीचे स्थित हो और प्रत्येक चित्र के लिये पृथक प्रमाण की ज़रूरत पड़ेगी ॥

परन्तु हम सिमृसन साहब के नियम का प्रवेश नहीं कर सकते जबतक कि हम प्रमाण न देदें कि यह नियम उस अर्थको पूरा करता है जिस अर्थ का प्रवेश किया गया है ॥ यह इस प्रकार से हो सकता है: —

चज गक्ष को बढ़ाओ यदि ज़रूरत हो कि वह बिन्दु ट पर एक दूसरे को काटें ॥ तो क्योंकि घच घक्ष से बड़ा नहीं है अर्थात् घच घज से बड़ा नहीं है इसलिये कोण घजच कोण घचज से बड़ा नहीं है १. १८.

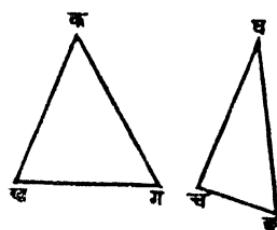
परन्तु वाह्य कोण घटज कोण घचट से बड़ा है　　१. १६

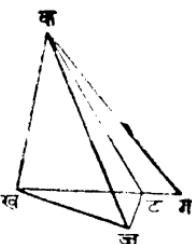
इसलिये कोण घटज कोण घजट से बड़ा है ॥

इसलिये घज बड़ा है घट से　　१. १६.

परन्तु घज समान घक्ष के है इसलिये घक्ष बड़ा है घट से ॥ इसलिये बिन्दु क्ष चज से नीचे स्थित होगा ॥

या निम्नलिखित रीति से सिद्ध कर सकते हैं

साध्य २४ द्वितीय प्रमाण ।

त्रिकोण कखग घचक्ष में खक समान चघ के है और कग समान घक्ष के है ॥ परन्तु कोण खकग कोण चघक्ष से बड़ा है तो आधार खग आधार चक्ष से बड़ा होगा ॥ त्रिकोण घचक्ष को त्रिकोण कखग पर इस कार से धरो कि घ स्थित हो क पर औ घच स्थित हो कख पर ॥ तो क्योंकि घच समान कख के है इसलिये च स्थित होगा ख पर ॥

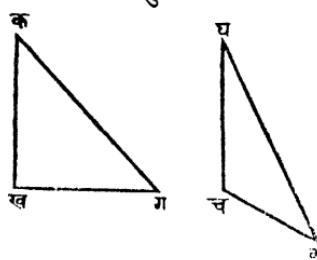
और क्योंकि कोण जघक कोण खकग से कम है क. अर्थ.

इसलिये घक स्थित होगा कख कग के मध्यमें मानलो कि घक स्थान कज पर स्थित है ॥

दशा. १. यदि ज स्थित हो खग पर तो ज स्थित होगा ख और ग के मध्यमें ॥ इसलिये खज छोटा है खग से परन्तु खज समान चक के है इसलिये खग बड़ा है चक से ॥

दशा. २. यदि ज खग पर स्थित न हो तो कोण गकज को सीधी रेखा कट से दो समभाग करो जो खग से बिन्दु ट पर मिलती है १. ६.

जट को जोड़ दो

तो त्रिकोण जकट गकट में जक समान गक के है ॥

और कट दोनों में सामान्य है और कोण जकट कोण गकट के समान बनाया गया है इसलिये जट समान गट के है १. ४.

परन्तु त्रिकोण खटज में दो बाहु खट टज मिलकर तीसरे बाहु खज से बड़े है अर्थात् खट टग मिलकर १. २०

खज से बड़े हैं इसलिये खग बड़ा है खज या चक से ॥

साध्य २५ प्रमेयोपपाद्य।

यदि एक त्रिकोण के दो बाहु दूसरे त्रिकोण के दो बाहुओं के पृथक् पृथक् समान हों परन्तु आधार एक का दूसरे त्रिकोण के आधार से बड़ा हो तो अन्तर्गत कोण उस त्रिकोण के बाहुओं का जिसका आधार बड़ा है बड़ा होगा दूसरे त्रिकोण के बाहुओं के अन्तर्गत कोण से॥

कखग घचछ दो त्रिकोण हैं जिन में दो बाहु खक कग दो बाहु चघ घछ के पृथक् पृथक् समान हैं परन्तु आधार खग आधार चछ से बड़ा है तो कोण खकग कोण चघछ से बड़ा होगा.

प्रमाण – यदि कोण खकग कोण चगछ से बड़ा न हो तो वह कोण चघछ के समान होगा या उससे छोटा होगा॥

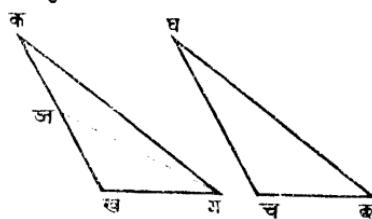
परन्तु कोण खकग कोण चघछ के समान नहीं है॥

क्योंकि फिर आधार खग आधार चछ के समान होगा १. ४.

परन्तु ऐसा नहीं है॥

और न कोण खकग कोण चघछ से छोटा है क्योंकि फिर आधार खग आधार चछ से छोटा होगा १. २४.

परन्तु ऐसा नहीं है॥

इसलिये कोण खकग कोण चघछ के न समान है और न उससे छोटा है अर्थात कोण खकग कोण चघछ से बड़ा है॥

अभ्यास।

किसी त्रिकोण कखग में शीर्ष क आधार खग के मध्य स्थान म से मिला दिया जाता है सिद्ध करो कि कोण कमख अधिक या न्यून होगा यथा कख बड़ा या छोटा होगा कग से॥

साध्य २६ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि एक त्रिकोण के दो कोण दूसरे त्रिकोण के दो कोण के पृथक् पृथक् समान हों और त्रिकोण का एक बाहु दूसरे त्रिकोण के एक बाहु के समान हो और यह समान बाहु चाहे समान कोणों के आसन्न स्थित हों और चाहे समान कोणों के सामने स्थित हों तो दोनो त्रिकोण सब प्रकार से समान होंगे ॥

दशा. १ जब समान बाहु दोनों त्रिकोणों के समान कोणों के आसन्न स्थित हों

कखग घचछ दो त्रिकोण हैं जिस में कोण कखग कगख कोण घचछ घछच के पृथक् पृथक् समान हैं और बाहु खग बाहु चछ के समान है तो त्रिकोण कखग घचछ सब प्रकार से परस्पर समान होंगे अर्थात कख समान घच के होगा और कग समान घछ के होगा और कोण खकग कोण चघछ के समान होगा ॥ क्योंकि यदि कख समान घच के न हो तो एक दूसरे से अवश्य बड़ा होगा ॥ मान लो कि कख बड़ा है घच से ॥

बनावट – कख में खज समान चघ के काटो   १. ३.

और जग को जोड़ दो ॥

प्रमाण – फिर दो त्रिकोणों जखग घचछ में जख समान घच के है   बनावट.

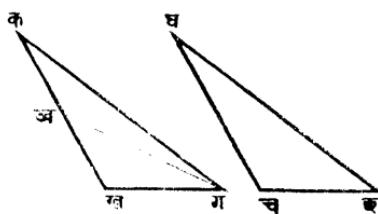
और खग समान चछ के है   क. अर्थ.

और अन्तर्गत कोण जखग अन्तर्गत कोण घचछ के है   क. अर्थ.

इसलिये त्रिकोण सब प्रकार से समान हैं   १. ४.

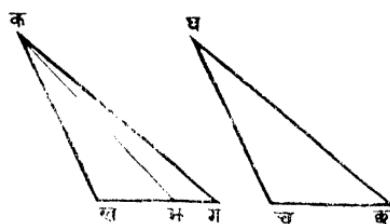
इसलिये कोण जगख कोण घछच के समान है ॥

परन्तु कोण कगख कोण घछच के समान है क. अर्थ.

इसलिये कोण जगख कोण कगख के समान है स्व. १.

अर्थात् समस्त समान है अपने भाग के जो असम्भव है

इसलिये कख असमान नहीं है घच के अर्थात् कख समान घच के है ॥ फिर त्रिकोण कखग घचछ में कख समान घच के सिद्ध किया गया है ॥

और खग समान चछ के है क. अर्थ.

और अन्तर्गत कोण कखग अन्तर्गत कोण घचछ के समान है क. अर्थ.

इसलिये त्रिकोण सब प्रकार से समान हैं १. ४.

इसलिये बाहु कग बाहु घछ के समान है ॥

और कोण खकग कोण चघछ के समान है ॥

दशा २ — जब समान बाहु दोनों त्रिकोणों में समान कोणों के सामने हों

कखग घचछ दो त्रिकोण हैं जिन में कोण कखग कगख कोण घचछ

घछच के पृथक पृथक् समान हैं और बाहु कख बाहु घच के समान है तो त्रिकोण कखग घचछ सब प्रकार से समान होंगे अर्थात खग समान

चघक्र के होगा और कग समान घक्र के होगा और कोण खकग कोण चघक्र के समान होगा ॥

क्योंकि यदि खग समान चक्र के न हो तो उन में से एक दूसरे बड़ा हो ॥

यदि सम्भव हो तो खग को चक्र से बड़ा मान लो

बनावट – खग में खभ समान चक्र के काटो १. ३.

और कभ को जोड़ दो

प्रमाण – तो त्रिकोण कखभ घचक्र में कख समान घच के है क. अर्थ.

और खभ समान चक्र के है बनावट

और अन्तर्गत कोण कखभ अन्तर्गत कोण घचक्र के समान है इसलिये त्रिकोण सब प्रकार समान हैं १. ४.

इसलिये कोण कभख कोण घक्रच के समान है

परन्तु कोण घक्रच कोण कगख के समान है क. अर्थ.

इसलिये कोण कभख कोण कगख के समान है अर्थात् स्व. १.

त्रिकोण कगभ का बहिःकोण उसके सामने के अन्तःकोण के समान है जो असम्भव है ॥ इसलिये खग चक्र के असमान नहीं है अर्थात् खग समान चक्र के है ॥

फिर क्योंकि त्रिकोण कखग घचक्र में कख समान क. अर्थ.

घच के है और खग समान चक्र के सिद्धि.

और अन्तर्गत कोण कखग अन्तर्गत घचक्र के समान है ॥

इसलिये त्रिकोण सब प्रकार से समान हैं १. ४.

इसलिये कग समान घक्र के है और कोण खकग कोण चघक्र के है ॥

सिद्धांत – इस साध्य को दोनो दशाओं में देखा गया कि त्रिकोण एक दूसरे को आच्छादन करते है और इसलिये वे क्षेत्रफल में समान हैं ॥

त्रिकोणों की निर्विशेष बराबरी का वर्णन

प्रथम पुस्तक के पहिले भाग के अन्त में यह बात उचित जान पड़ती है कि उन साध्यों पर (अर्थात साध्य ४-८-२६) विशेष ध्यान दिया जाय जो दो त्रिकोणों की निर्विशेष बराबरी के विषय में हैं॥

इन साध्यों के फल को संक्षिप्त रीति से कहते हैं॥

दो त्रिकोण सब प्रकार से परस्पर समान होते हैं जब एक के निम्नलिखित भाग दूसरे के सदृश भाग के पृथक् पृथक् समान होते हैं॥

१. दो बाहु और उनका अन्तर्गत कोण — साध्य. ४.

२. तीन बाहु — अनुमान सा. ८.

३. (क) दो कोण और आसन्न बाहु — साध्य. २६.

(ख) दो कोण और उन में से एक के सामने का बाहु

इसी से नये छात्र कदाचित् यह अनुमान करेंगे कि दो त्रिकोण तभी प्रकार से समान सिद्ध हो सकते हैं जब एक के तीन भाग दूसरे के तीन भाग के पृथक् पृथक् समान हों परन्तु इस सिद्धान्त में दो बाधा हैं॥

(१) जब दो त्रिकोण में एक के तीन कोण दूसरे के तीन कोण के पृथक् पृथक् समान हों तो यह अनुमान अवश्य नहीं हो सकता कि दो त्रिकोण सब प्रकार से समान होंगे॥

(२) जब दो त्रिकोण में एक के दो बाहु दूसरे के दो बाहु के पृथक् पृथक् समान हों और एक कोण एक कोण के समान हो परन्तु यह कोण समान बाहु के अन्तर्गत न हो तो त्रिकोण सब प्रकार से समान होंगे यह अवश्य नहीं है॥

इन दो दशाओं में कल्पित अर्थ में एक और नियम बढ़ाना चाहिये इस से पहिले कि हम कहें कि त्रिकोण सब प्रकार से समान होंगे॥

[देखो साध्य और अभ्यास पहिला पुस्तक के अभ्यास १३ पत्र]

हम देखते हैं कि दो त्रिकोण की निर्विशेष बराबरी की तीनों दशाओं में अर्थात् साध्य ४-८-२६ में सिद्ध किया गया है कि त्रिकोण एक दूसरे

को आच्छादन कर सकते हैं और इसलिये वे क्षेत्रफल तथा और सब बातों में बराबर हैं॥ परन्तु यूक्लिड साध्य ४ के प्रयोग से सदा काम लेता है जब वह दो त्रिकोण के क्षेत्रफल की बराबरी का अनुमान उनके और भागों की बराबरी से करना चाहता है॥

यह रोक वर्तमान मूल ग्रन्थ में हटा दी गई है [देखो साध्य ३४ की नोट]

अभ्यास साध्य १२-२६ पर।

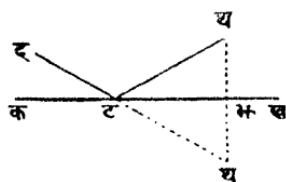
१. यदि समद्विबाहु त्रिकोण कखग के आधार खग के कोणों के दो समभाग करने वाले खम और गर सामने के बाहु में म और र पर समाप्त हों तो सिद्ध करो कि त्रिकोण रखग और मगख सब प्रकार से समान होंगे॥

२. सिद्ध करो कि वे लम्ब जो किसी समद्विबाहु त्रिकोण के आधार के सिरों से सामने के बाहु पर डाले जायें परस्पर समान होंगे॥

३. किसी कोण के दो समभाग करने वाली रेखा पर कोई बिन्दु कोण की दोनों बाहुओं से समान दूरी पर होता है॥

४. किसी सीधी रेखा कख के मध्य बिन्दु त में से होती हुई सीधी रेखा खींची गई है और उसपर क और ख से लम्ब कम खर डाले गये हैं सिद्ध करो कि कम खर परस्पर समान हैं॥

५. यदि किसी त्रिकोण के शीर्षकोण को दो समभाग करने वाली रेखा उस के आधार पर लम्ब हो तो वह त्रिकोण समद्विबाहु त्रिकोण होगा॥

६. दिये हुवे बिन्दु से दी हुई सीधी रेखा तक जितनी सीधी रेखा खींची जायें उन में लम्ब सब से छोटा है और शेष में लम्ब के समीप वाली लम्ब से दूर वाली से छोटी है और केवल दो रेखा परस्पर समान उस बिन्दु से दी हुई रेखा तक खींची जा सकती हैं जो लम्ब के इधर उधर होती हैं॥

७. दी हुई सीधी रेखा के एक ही ओर दिये हुये दो बिन्दुओं से दो सीधी रेखायें ऐसी खींचो जो दी हुई रेखा में मिलें और उसके साथ समान कोण बनावें॥

मानलो कि कख दी हुई रेखा है और घ द दिये हुए बिन्दु हैं घ और द से दो सीधी रेखा ऐसी खींचनी हैं जो कख में किसी बिन्दु पर मिलें और उसके साथ समान कोण बनावें॥

बनावट — घ से कख पर घ भ लम्ब डालो घभ को घु तक बढ़ाओ और भघु को घभ के समान बनाओ दघु खींचो कख को ट में काटता हुआ — घट को मिला दो। सो घट दट प्रार्थित रेखा हैं (प्रमाण दो)

८. दी हुई सीधी रेखा में एक बिन्दु मालूम करो जो दो परस्पर काटने वाली रेखाओं से समान दूरी पर हो॥ यह किस दशा में असम्भव है?

९. दिये हुए बिन्दु से ऐसी सीधी रेखा खींचो कि दिये हुए दो बिन्दुओं से जो लम्ब उसपर डाले जांय वे परस्पर समान हों-ये किस दशा में असम्भव है?

दूसरा भाग।

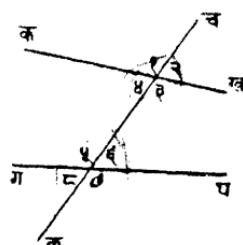
समानान्तर सीधी रेखा और समानान्तर चतुर्भुज।

संज्ञा – समानान्तर सीधी रेखा वे हैं जो एक ही धरातल में हो कर दोनों ओर कितनी ही दूर तक बढ़ाई जाने से परस्पर न मिलें॥

जब दो सीधी रेखा कख गघ से तीसरी रेखा चछ मिलती है तो आठ कोण बनते हैं जिन को पहिचानने के लिये पृथक् पृथक् विशेष नाम हैं॥

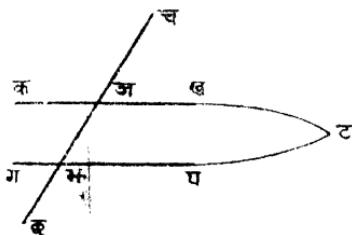
यथा आसन्न चित्र में १-२-७-८ वाह्य कोण कहाते हैं॥

३-४-५-६ अन्तःकोण कहाते हैं॥

४ और ६ कोण एकान्तर कोण कहाते हैं॥

और उसी प्रकार से ३ और ५ एकान्तर कोण कहाते हैं॥

२ और ६ कोण में से २ वाह्य कोण और ६ सन्मुख अन्तःकोण चछ के एक ही ओर कहाते हैं॥ २ और ६ प्रायः सदृश कोण कहाते हैं और उसी प्रकार से १ और ५-७ और ३-८ और ४ सदृश कोण कहाते हैं॥

यूकलिड का समानान्तर सीधी रेखाओंका विषय उसके बारहवें स्वयं सिद्ध पर निर्भर है जिसको हम यहां दोहराते हैं॥

स्वयं सिद्ध १२. यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं को इस प्रकार से काटे कि अपने एक ही ओर के दो अन्तःकोणों को मिलाकर दो समकोणों से छोटा बनावे तो यह दोनों सीधी रेखायें यदि उस ओर बढ़ाई जायें जिस ओर कोण दो समकोण से कम हैं तो परस्पर मिल जायंगी॥

यथा ऊपर के चित्र में यदि कोण ३ और ६ दो समकोण से कम हों तो कहते हैं कि कख गघ ख और घ की ओर बढ़ाने से मिल जायेंगी॥

यह स्वयं सिद्ध साध्य २९ की सिद्धि में काम आता है इसलिये उस साध्य के नोट में इस के विषय में कुछ कहा जायगा ॥

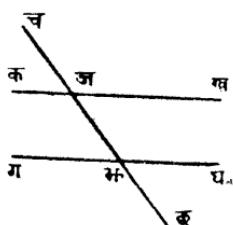
साध्य २७ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि एक सीधी रेखा दो और सीधी रेखाओं पर गिर कर एकान्तर कोणों को परस्पर समान बनावे तो यह दोनों रेखायें समानान्तर होंगी ॥

रेखा चछ रेखा कख गघ को ज और झ पर काटती है और एकान्तर कोण कजझ जझघ परस्पर समान बनाती है ॥

तो कख गघ समानान्तर होंगी ॥

प्रमाण – क्योंकि यदि कख गघ समानान्तर न हों तो वह बढ़ाने से खघ की ओर या कग की ओर परस्पर मिल जायंगी यदि सम्भव हो तो कख गघ को खघ की ओर बढ़ाओ और ट पर मिलने दो ॥ तो टजझ एक त्रिकोण है जिस का एक बाहु टज क तक बढ़ाया गया है इसलिये वाह्य कोण कजझ सन्मुख अन्तःकोण जझट से बड़ा है १. १६.

परन्तु कोण कजझ कोण जझट के समान है क. अर्थ.

इसलिये कोण कजझ जझट दोनों परस्पर समान और असमान हैं जो असम्भव है इसलिये रेखायें कख गघ नहीं मिलतीं हैं जब वे ख और घ की ओर बढ़ाई जांय ॥

इसी प्रकार से सिद्ध हो सकता है कि वह क और ग की ओर भी न मिलेंगी इसलिये वे समानान्तर हैं ॥

साध्य २८ प्रमेयोपपाद्य।

यदि एक सीधी रेखा दो और सीधी रेखाओं पर गिर कर एक वाह्य कोण को अपने उसी ओर के सन्मुख अन्तःकोण के समान बनावें या एक ही ओर के अन्तःकोणों को मिलाकर दो समकोण के समान बनावें तो वे दो रेखायें समानान्तर होंगी ॥

सीधी रेखा चछ दो सीधी रेखाओं कख गघ को ज और झ पर काटती हैं और प्रथम वाह्य कोण चजख सन्मुख अन्तःकोण जझघ के समान है तो कख गघ समानान्तर होंगी ॥

प्रमाण – क्योंकि कोण चजख कोण जझघ के समान है और क्योंकि कोण चजख सन्मुख अधर कोण कजझ के समान है १. १५

इसलिये कोण कजझ कोण जझघ के समान है परन्तु यह कोण एकान्तर हैं इसलिये कख गघ समानान्तर हैं १. २९.

द्वितीय – दो अन्तःकोण खजझ और जझघ दो समकोणों के समान हैं तो कख गघ समानान्तर होंगी ॥

प्रमाण – क्योंकि कोण खजझ जझघ मिलकर दो समकोण के समान हैं क. अर्थ.

और क्योंकि आसन्न कोण खजझ कजझ मिलकर दो समकोण के समान हैं १. १३.

इसलिये कोण खजझ मिलकर दो कोण खजझ जझघ के समान हैं कजझ इन दो समान पदार्थों में से सामान्य कोण खजझ निकाल डालो इसलिये शेष कोण कजझ शेष कोण जझघ के समान है और ये कोण एकान्तर हैं. इसलिये कख गघ समानान्तर हैं १. २९.

साध्य २९ प्रमेयोपपाद्य।

यदि एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं पर गिरे तो एकान्तर कोण परस्पर समान होंगे और वाह्य कोण उसी ओर के सन्मुख अन्तःकोण के समान होगा और एक ही ओर के दो अन्तःकोण मिलकर दो समकोण के समान होंगे॥

सीधी रेखा चछ समानान्तर सीधी रेखा कखगघ को जझ पर काटती है तो

(१) एकान्तर कोण कजझ जझघ समान होंगे

(२) वाह्य कोण चजख सन्मुख अन्तःकोण जझघ के समान होगा

(३) दो अन्तःकोण खजझ जझघ मिलकर दो समकोण के समान होंगे.

प्रमाण (१) क्योंकि यदि कोण कजझ कोण जझघ के समान न हो तो उन में से एक दूसरे से बड़ा होगा॥ यदि सम्भव हो तो कोण कजझ को कोण जझघ से बड़ा मान लो॥ इन दोनों में कोण खजझ जोड़ दो॥

तो कोण कजझ खजझ मिलकर खजझ जझघ से बड़े हैं॥

परन्तु आसन्न कोण कजझ खजझ मिलकर दो समकोण के समान हैं १. १३.

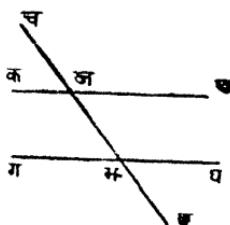
इसलिये कोण खजझ जझघ मिलकर दो समकोण से छोटे हैं॥

इसलिये कख गघ खघ की ओर मिलेंगी स्व. १२.

परन्तु वे कभी नहीं मिलतीं क्योंकि वे समानान्तर हैं क. अप.

इसलिये कजभ कोण जभघ कोण के असमान नहीं है ॥

अर्थात् एकान्तर कोण कजभ जभघ समान हैं ॥

(२) फिर क्योंकि कोण कजभ ऊर्ध्व सन्मुख कोण चजख के समान है १. १५.

और क्योंकि कोण कजभ कोण जभघ के समान सिद्ध किया गया है ॥

इसलिये वाह्य कोण चजख सन्मुख अन्तःकोण जभघ के समान है ॥

(३) और अन्त में कोण चजख कोण जभघ के समान सिद्ध किया गया है ॥

इनदोनो में कोण खजभ जोड़ दो तो कोण चजख खजभ मिलकर दो कोण खजभ जभघ के समान हैं ॥

परन्तु आसन्न कोण चजख खजभ मिलकर दो समकोण के समान होते हैं १. १३

इसलिये दो अन्तःकोण खजभ जभघ मिलकर दो समकोण के समान हैं ॥

साध्य २७-२८-२९ पर अभ्यास।

१. दो सीधी रेखा कख गघ एक दूसरे के विन्दु त पर दो समभाग करती हैं सिद्ध करो कि सीधी रेखाएं जो कग खघ को मिलाती हैं समानान्तर होंगी [१. २७]

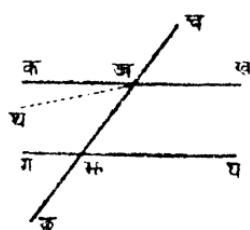
२. सीधी रेखायें जो एक ही सीधी रेखा पर लम्ब हों समानान्तर होंगी ॥ [१. २७ या १. २८]

३. यदि एक सीधी रेखा दो या अधिक समानान्तर रेखाओं से मिले और एक पर लम्ब हो तो वह सब पर लम्ब होगी [१. २९]

४. यदि दो सीधी रेखायें दो और सीधी रेखाओं के पृथक् पृथक् समानान्तर हों तो पहिली दो रेखाओं का अन्तर्गत कोण दूसरी दो रेखाओं के अन्तर्गत कोण के समान होगा ॥

१२ वें स्वयंसिद्ध पर नोट ॥

यह बात मानलेनी पड़ेगी कि १२ वां स्वयंसिद्ध समानान्तर रेखाओं की कल्पना का संतोषप्रदायक मूल नहीं है ॥ इसको हम तत्त्व या स्वयंसिद्ध नहीं कर सकते और इसलिये स्वयंसिद्ध के आवश्यक गुण नहीं रखता ॥ और यह कठिनता दूर नहीं होती यदि इसको साध्य १७ वें का सिद्धांत मानलें जिसका यह विरुद्धावयव है परन्तु हम उसी का यहां वर्णन करेंगे जो सबसे अधिक माना जाता है ॥

यह रीति निम्नलिखित कल्पना पर निर्भर है जिस को मूल स्वयंसिद्ध निवेदन करते हैं ॥

स्वयंसिद्ध – दो सीधी रेखायें जो एक दूसरे को काटें एकही सीधी रेखा के समानान्तर नहीं हो सकतीं ॥

यह वचन प्लेफेयर साहब का स्वयंसिद्ध कहाता है और यदि यह पूरा शंका रहित नहीं है तोभी यह यूक्लिड के स्वयंसिद्ध से कम विकृत है और मूल गिना जाता है औ विना प्रमाण शीघ्र अंगीकार किया जाता है ॥

साध्य २७ और २८ साधारण प्रकार से सिद्ध किये जा कर साध्य २९ का प्रथम भाग इस प्रकार से सिद्ध किया गया है ॥

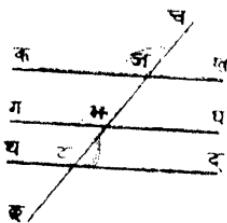
साध्य २९ द्वितीय प्रमाण ।

यदि एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं पर गिरे तो एकान्तर कोण परस्पर समान होंगे ॥

सीधी रेखा चछ दो समानान्तर सीधी रेखाओं कखगघ से ज और झ पर मिलती है तो एकान्तर कोण कजझ जझघ समान होंगे क्योंकि यदि कोण कजझ कोण जझघ के समान न हो तो झज में बिन्दु ज पर कोण झजथ को उसके एकान्तर कोण जझघ के समान बनाओ १. २३.

तो थज और गज समानान्तर हैं १. २७.

परन्तु कख गघ समानान्तर हैं क. अर्थ.

इसलिये दो सीधी रेखायें कज थज जो एक दूसरे को काटती हैं दोनों गघ के समानान्तर हैं जो असम्भव है प्रेफयर का स्वं. सिद्ध.

इसलिये कोण कजझ कोण जझघ के असमान नहीं है अर्थात् एकान्तर कोण कजझ जझघ समान हैं ॥

इस साध्य के द्वितीय तृतीय भाग फिर मूल अनुसार सिद्ध कर सकते है और युकलिड का बारहवां स्वयंसिद्ध सिद्धांत (परिणाम) हो जाता है ॥

साध्य ३० प्रमेयोपपाद्य ।

सीधी रेखाएं जो एक ही सीधी रेखाके समानान्तर हों परस्पर समानान्तर होंगी ॥

मानलो कि सीधी रेखा कख गघ दोनों सीधी रेखा थद के समानान्तर हैं तो कख गघ परस्पर समानान्तर होंगी ॥

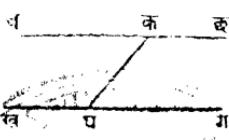
बनावट – कोई सीधी रेखा चछ खींचो

जो कख गघ थद को जझट पर काटती है

प्रमाण – फिर क्योंकि कख थद समानान्तर हैं और चछ उनसे मिलती है ॥

इसलिये कोण कजट एकान्तर कोण जटद के समान है १. २९.

क्योंकि गघ थद समानान्तर है इसलिये वाह्य कोण जझघ सम्मुख अन्तःकोण झटद के समान है १. २९.

इसलिये कोण कजझ कोण जझघ के समान है और यह कोण एकान्तर है इसलिये कख गघ समानान्तर हैं १. २७

नोट – यदि थद कख और गघ के मध्य में स्थित हो तो साध्य को उसी प्रकार से सिद्ध कर सकते हैं पर इस दशा में प्रमाण की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यह बात विचार में नहीं आसकती कि दो सीधी रेखायें जो एक बीच वाली सीधी रेखा से नहीं मिलतीं परस्पर मिलें ॥

यह साध्य प्लेफेयरके स्वयंसिद्ध से सहज में सिद्ध हो सकता है जिसका यह विरुद्धावयव है ॥

क्योंकि यदि कख और गघ समानान्तर न हों तो वह बढ़ाने से मिल जायंगी और फिर दो सीधी रेखाएं जो एक दूसरे को काटती हैं एक तीसरी रेखा के समानान्तर हैं जो असम्भव है॥ इसलिए कख गघ कभी नहीं मिलती अर्थात् वे समानान्तर हैं॥

साध्य ३१ वस्तूपपाद्य।

दिये हुए विन्दु में से होती हुई एक सीधी रेखा खींचो जो दी हुई सीधी रेखा के समानान्तर हो॥

क दिया हुवा विन्दु है और खग दी हुई सीधी रेखा है क में से होती हुई एक सीधी रेखा खग के समानान्तर खींचो॥

बनावट — खग में कोई विन्दु घ लो और कघ को मिला दो।

विन्दु क पर कघ में कोण घकच को कोण कघग के समान और एकान्तर बनाओ १.२३

चक को छ तक बढ़ाओ तो चछ समानान्तर खग के होगी

प्रमाण — क्योंकि सीधी रेखा कघ दो और सीधी रेखा चछ खग से मिला कर एकान्तर कोण चकघ कघग को परस्पर समान बनाती है बनावट

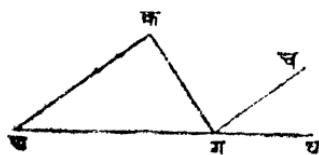
इसलिये चछ और खग समानान्तर हैं

और चछ विन्दु क में से होता हुआ खींचा गया है॥

अभ्यास

१. समद्विबाहु त्रिकोण के आधार के समानान्तर जो रेखा खींची जाय वह समबाहु के साथ समान कोण बनावेगी॥

२. यदि किसी कोण के सम दो भाग करनेवाली रेखा में किसी विन्दु

में एक सीधी रेखा कोण के किसी बाहु के समानान्तर खींची जाय तो जो त्रिकोण बनेगा वह समद्विबाहु होगा ॥

३. दिये हुए बिन्दु से एक सीधी रेखा खींचो जो एक दी हुई रेखा के साथ दिये हुए कोण के समान कोण बनावे ॥

४. किसी समद्विबाहु त्रिकोण कखग के आधार खग में किसी बिन्दु म से एक सीधी रेखा आधार के साथ समकोण बनाती खींची गई है जो कख को र पर और बढ़े हुये गक को ल पर काटती है सिद्ध करो कि करल समद्विबाहु त्रिकोण है

५. यदि सीधी रेखा जो किसी त्रिकोण के बाह्य कोण के दो सम भाग करती है सन्मुख बाहु के समानान्तर हो तो त्रिकोण समद्विबाहु होगा ॥

साध्य ३२ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि किसी त्रिकोण का एक बाहु बढ़ाया जाय तो बाह्य कोण सन्मुख के दो अन्तःकोण के जोड़ के समान होगा और किसी त्रिकोण के तीनों अन्तःकोण मिलकर दो समकोण के समान होते हैं ॥

कखग एक त्रिकोण है और उसका एक बाहु खग घतक बढ़ा या गया है तो

(१) बाह्य कोण कगघ दो सन्मुख अन्तःकोण गकख कखग के जोड़ के समान होगा

(२) तीन अन्तःकोण कखग खगक मिल कर दो समकोण के समान होंगे ॥ बनावट

बनावट — ग से गच समानान्तर खक के खींचो १. ३१.

प्रमाण—(१) फिर क्योंकि कख गच समानान्तर हैं और कग उनसे मिलती है इस लिये कोण कगच एकान्तर कोण गकख के समान है १. २९

और क्योंकि खक गच समानान्तर हैं और खघ उनसे मिलती है इसलिये वाह्य कोण चगघ सन्मुख अन्तःकोण कखग के समान है॥ १. २९

इसलिये सकल वाह्य कोण कगघ सन्मुख अन्तःकोण गकख कखग के जोड़ के समान है

(२) फिर क्योंकि कोण कगघ कोण गकख कखग के जोड़ के समान है इन दोनों में कोण खगक जोड़ दो तो कोण खगक कगघ मिल कर कोण खगक गकख कखग के जोड़ के समान हैं

परन्तु आसन्न कोण खगक कगघ मिल कर दो सम कोण के समान हैं। १. १३

इस लिये कोण खगक गकख कखग मिल कर दो समकोण के समान हैं॥

इस साध्य से हम निम्नलिखित बड़े २ फल निकालते हैं

१. यदि किसी त्रिकोण के दो कोण दूसरे त्रिकोण के दो कोणों के पृथक् २ समान हों तो एक का तीसरा कोण दूसरे के तीसरे कोण के समान होगा

२. समकोण त्रिकोण में दोनों न्यून कोण एक दूसरे के पूरक होते हैं

३. समकोण समद्विबाहु त्रिकोण में दोनों न्यून कोण आधे समकोण के समान होते हैं

४. यदि किसी त्रिकोण के दो कोण मिलकर उसके तीसरे कोण के समान हों तो त्रिकोण समकोण त्रिकोण होगा

५. किसी चतुर्भुज चित्र के कोणों का जोड़ चार सम कोणों के समान होता है

६. समत्रिबाहु त्रिकोण का प्रत्येक कोण समकोण का दो तिहाई होता है॥

साध्य ३२ पर अभ्यास।

१. सिद्ध करो कि किसी त्रिकोण के तीन कोण मिल कर दो समकोण के समान होते हैं (१) शीर्ष से आधार के समानान्तर एक सीधी रेखा खींचने से (२) शीर्षको आधार को किसी बिन्दु से मिला देने से॥

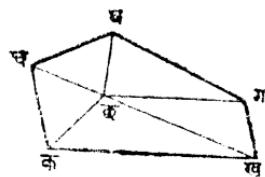
२. यदि किसी त्रिकोण का आधार दोनों ओर बढ़ाया जाय तो दो बाह्य कोणों के जोड़ में से शीर्ष कोण के घटाने से जो शेष रहे वह दो समकोण के समान होगा॥

३. यदि दो सीधी रेखायें दो और सीधी रेखाओं पर पृथक् २ लम्ब हों तो पहिली दो रेखाओंका अन्तर्गत न्यूनकोण दूसरी दो रेखाओं के अन्तर्गत न्यून कोण के समान होगा

४. वह सीधी रेखा जो किसी समकोण त्रिकोण में समकोण को कर्ण के मध्यस्थान से मिलाती है त्रिकोण को दो समद्विबाहु त्रिकोण में बांटती है इसलिये यह मिलनेवाली रेखा कर्णकी आधी होती है॥

५. दो हुई परिमित सीधी रेखा पर उसके एक सिरे से बिना सीधी रेखा को बढ़ाये एक सीधी रेखा खींचो जो उसके साथ समकोण बनावे

[कख दी हुई रेखा है कख पर समद्विबाहु त्रिकोण कगख बनाओ]

कख को घ तक बढ़ाओ और गघ को खग के समान बनाओ कघ मिला दो तो कघ कख पर लम्ब होगा॥

६. एक समकोण के तीन समान भाग करो॥

७. कोण जो किसी समद्विबाहु त्रिकोण के आधार के कोण के सम दो भाग करने वाली रेखाओं से बनता है वह उस बाह्य कोण के समान होता है जो आधार को बढ़ाने से बने॥

८. चतुर्भुज के दो आसन्न कोण के सम दो भाग करने वाली रेखाओं का अन्तर्गत कोण शेष कोणों के आधे जोड़ के समान होता है॥

निम्नलिखित प्रमेयोपपाद्य रौबर्ट सिमूसन ने साध्य ३२ के सिद्धांत की रीति पर कहे हैं॥

सिद्धान्त—१. किसी सरल चित्र के सब अन्तःकोण चार समकोण को मिलाकर सरल चित्र की बाहुओं से दूने समकोण के समान होते हैं॥

कखगघच एक सरलचित्र है उसमें कोई बिन्दु क उसके भीतर लो और क को चित्र के सब कोणों से मिला दो तो चित्र में इतने त्रिकोण हो जाते हैं जितने चित्र के बाहु हैं॥

और प्रत्येक त्रिकोण के तीन कोण मिलकर दो समकोण के समान हैं १. ३२.

इसलिये सब त्रिकोणों के कोण मिलाकर चित्र के बाहु के दूगने समकोणों के समान हैं॥

परन्तु सबकोण चित्र के अन्तःकोण और बिन्दु क के कोण हैं॥

और बिन्दु क के कोण मिलकर चार समकोण के समान हैं १. १५. अनुमान

इसलिये चित्र के सब अन्तःकोण चार समकोणों को मिलाकर चित्र के बाहु से दूने समकोण के समान हैं॥

सिद्धांत – २. यदि किसी सरल चित्र के बाहु जिसमें कोई पुनर्युक्त कोण नहो एक ही ओर को बढ़ाये जांय तो जितने वाह्यकोण बनेंगे सब मिलकर चार समकोणों के समान होंगे ॥

चार समकोणों के समान होंगे क्योंकि चित्र के प्रत्येक बिन्दु पर अन्तःकोण और बहिःकोण मिलाकर दो समकोण के समान हैं १. १३.

इसलिये सब वाह्य और अभ्यंतर कोण मिलाकर चित्र के बाहु से दूने समकोण के समान हैं ॥

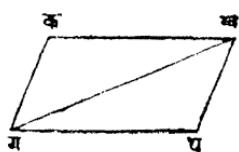
परन्तु सब अन्तःकोण चार समकोण को मिलाकर चित्र के बाहु से दूने समकोण के समान हैं १. ३२. अनुमान. १.

इसलिये जब अन्तःकोण बहिःकोण मिलकर सब अन्तःकोण और चार समकोण के समान हैं तो बहिःकोण मिलकर चार समकोण के समान हैं ॥

सिमसन के अनुमान पर अभ्यास ॥

[बहुभुज चित्र को नियत कहते हैं जब उसके सब बाहु और सब कोण समान होते हैं]

१. (१) नियत षड्भुज और (२) नियत अष्टभुज के प्रत्येक कोण का परिमाण समकोण के संकेत में बताओ ॥ [अर्थात एक कोण कितने समकोण के समान होगा]

२. यदि किसी नियत षड्भुज का एक बाहु बढ़ाया जाय तो सिद्ध करो कि बहिःकोण समत्रिबाहु त्रिकोण के कोण के समान होगा ॥

३. सिमसन का पहिला अनुमान सरल चित्र के एक शीर्ष को और शीर्षों से मिलाकर सिद्ध करो ॥

४. किसी ठ बाहु वाले नियत बहुभुज चित्र के एक कोण का परिमाण बताओ

५. यदि किसी बहुभुज क्षेत्र के एकान्तर बाहु बढ़ाकर मिलाये जांय तो अन्तर्गत कोणों का जोड़ आठ समकोण को मिलाकर चित्र के बाहु से दूने समकोण के समान होगा ॥

साध्य ३३ प्रमेयोपपाद्य ।

दो सीधी समान और समानान्तर रेखाओं के एक ओर के सिरों को जो सीधी रेखा मिलाती हैं वे स्वयं समान और समानान्तर होती हैं ॥

कख गघ दो समान समानान्तर सीधी रेखा हैं और सीधी रेखा कग खघ उनके एक ही ओर के सिरों को मिलाती हैं तो कग खघ समान और समानान्तर होंगी .

बनावट — खग को जोड़ दो

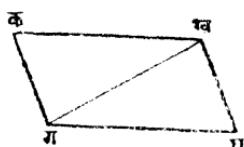
प्रमाण — क्योंकि कख गघ समानान्तर हैं और खग उनसे मिलती है ॥

इसलिये एकान्तर कोण कखग खगघ समान हैं १. २९.

अब क्योंकि त्रिकोण कखग घगख में कख समान गघ के है क. अर्थ.

और खग दोनो में सामान्य है और कोण कखग कोण घगख के समान सिद्ध हो चुका है इसलिये त्रिकोण सब प्रकार से समान हैं १. ४.

इसलिये आधार कग आधार घख के समान है

और कोण कगख कोण घखग के समान है

परन्तु यह कोण एकान्तर हैं इसलिये कग खघ समानान्तर हैं १. २७.

और वे समान सिद्ध हो चुके हैं ॥

संज्ञा — समानान्तर चतुर्भुज वह चित्र है जिसके सन्मुख बाहु समानान्तर हों ॥

साध्य ३४ प्रमेयोपपाद्य ।

समानान्तर चतुर्भुज के सन्मुख बाहु और कोण परस्पर समान होते हैं और प्रत्येक कर्ण समानान्तर चतुर्भुज को दो समभाग करता है ॥

कगघख एक समानान्तर चतुर्भुज है

जिस का खग एक

कर्ण है तो चित्र के सन्मुख बाहु और कोण परस्पर समान होंगे और खग कर्ण इसको दो समभाग करेगा ॥

प्रमाण — क्योंकि कख गघ समानान्तर हैं और खग उनसे मिलती है तो एकान्तर कोण कखग घगख समान हैं १. २९.

और फिर क्योंकि कग खघ समानान्तर हैं और खग उनसे मिलती है ॥

इसलिये एकान्तर कोण कगख घखग समान हैं १. २९.

फिर क्योंकि त्रिकोण कखग घगख में कोण कखग कोण घगख के समान है और कोण कगख कोण घखग के समान है ॥

और बाहु खग जो समान कोणों के आसन्न है दोनों में सामान्य है ॥

इसलिये त्रिकोण कखग घगख सब प्रकार से समान हैं १. २६.

इसलिये कख समान घग के और कग समान घख के है

और कोण गखघ कोण खगक के समान है

और क्योंकि कोण कखग कोण घगख के समान है और कोण गखघ कोण खगक के समान है इस लिये समस्त कोण कघख समस्त कोण गखक के समान है

और क्योंकि ये सिद्ध हो गया है कि त्रिकोण कखग घगख सब प्रकार से समान हैं इसलिये कर्ण खग समानान्तर चतुर्भुज कगघख के दो समभाग करता है ॥

नोट – इस प्रमाण में जो यहां दिया गया है यूक्लिड ने साध्य ४ का प्रयोग बढ़ाया है यह दिखाने के लिये कि त्रिकोण कखग घगख क्षेत्रफल में समान हैं और इसलिये कर्ण खग समानान्तर चतुर्भज के दो समभाग करता है ॥ परन्तु क्षेत्रफल की समता उसपद से अच्छे प्रकार से सिद्ध हो जाती है जो पृ. १ साध्य २६ के ऊपर निर्भर है । देखो पत्र

अभ्यास ।

१. यदि किसी समानान्तर चतुर्भुज का एक कोण समकोण हो तो उस के सब कोण समकोण होंगे ॥

२. यदि चतुर्भुज के सन्मुख के बाहु समान हों तो चित्र समानान्तर चतुर्भुज होगा ॥

३. यदि चतुर्भुज के सन्मुख के कोण समान हों तो चित्र समानान्तर चतुर्भुज होगा ॥

४. यदि किसी चतुर्भुज के सब बाहु परस्पर समान हों और एक कोण समकोण हो तो उसके सब कोण समकोण होंगे ॥

५. समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे के दो समभाग करते हैं ॥

६. यदि चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे के समभाग करें तो चित्र समानान्तर चतुर्भुज होगा ॥

७. यदि किसी समानान्तर चतुर्भुज के सन्मुख कोण के, दो कर्ण जो उन कोणों को मिलाते हैं, दो समभाग करें तो चित्र समचतुर्बाहु होगा ॥

८. यदि किसी समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण समान हों तो उसके सब कोण समकोण होंगे ॥

९. समानान्तर चतुर्भुज में जिस के कोण समकोण नहीं हैं कर्ण असमान होते हैं ॥

१०. कोई रेखा (सीधी) जो किसी समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण के मध्य बिन्दु में से खींची जाय और दो सन्मुख बाहु पर समाप्त हो उस बिन्दु पर दो समभाग में बांटी जाती है॥

११. यदि एक समानान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न बाहु दूसरे समानान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न बाहु के पृथक् २ समान हों और एक कोण भी समान हो तो दोनों समानान्तर चतुर्भुज सब प्रकार से समान होंगे॥

१२. दो आयत समान होते हैं यदि एक के दो आसन्न बाहु दूसरे के दो आसन्न बाहुओं के पृथक् पृथक् समान हों॥

१३. समानान्तर चतुर्भुज में लम्ब सन्मुख दो कोण से दूसरे सन्मुख दो कोणों को मिलाने वाले कर्ण पर जो डाले जांय परस्पर समान होते हैं॥

१४. यदि कखगघ एक समानान्तर चतुर्भुज हो और सर कघ खग के पृथक २ मध्य बिन्दु हों तो सिद्ध करो कि करगस समानान्तर चतुर्भुज है॥

भाग १ और २ पर मिश्रित अभ्यास।

१. सिद्ध करो कि साध्य २ की बनावट साधारण रीति से आठ भिन्न प्रकार से हो सकती है — सब से पृथक् दशा बताओ॥

२. दो ऊर्ध्व अधर सन्मुख कोण के दो समभाग करने वाली सीधी रेखा एक सीध में होती हैं॥

३. साध्य १६ के चित्र में यदि कछ को मिलाईं तो सिद्ध करो कि

(१) कछ समान खग के है

(२) त्रिकोण कखग त्रिकोण गछक के सब प्रकार से समान हैं

४. कखग एक समकोण त्रिकोण है जिस में ख समकोण है और खग घ तक बढ़ाया गया है सिद्ध करो कि कोण कगघ अधिक कोण है॥

५. सिद्ध करो कि किसी नियत n बाहु वाले ऋजुभुज का प्रत्येक कोण $\frac{2(n-2)}{n}$ समकोण के समान होता है ॥

६. किसी त्रिकोण के आधार कोण के दो समभाग करने वाली रेखाओं का अन्तर्गत कोण आधार कोण के आधे और शीर्ष कोण को जोड़ को मिलाकर समान होता है

७. किसी त्रिकोण के बहिः कोणों के दो समभाग करने वालों का अन्तर्गत कोण सदृश दो अन्तःकोण के आधे जोड़ के समान होता है ॥

८. यदि दो परस्पर काटती हुई रेखाओं पर उनके बीच में किसी बिन्दु से लम्ब डाले जांय तो सिद्ध करो कि लम्बों के अन्तर्गत कोण के दो समभाग करने वाली रेखा रेखाओं के अन्तर्गत कोण के दो समभाग करने वाली रेखा के समानान्तर होगी या उसी पर स्थित होगी ॥

९. यदि किसी समद्विबाहु त्रिकोण कखग के समान बाहु में दो बिन्दु घट इस प्रकार से लिये जांय कि खघ समान गट के हो तो सिद्ध करो कि घट समानान्तर खग के होगी ॥

१०. कखग घचछ दो त्रिकोण इस प्रकार से हैं कि कख खग समान और समानान्तर हैं घच चछ के पृथक् २ सिद्ध करो कि कग समान और समानान्तर है घछ के ॥

११. साध्य ३२ का दूसरा अनुमान किसी कोण से सब बाहु को समानान्तर रेखायें खींच कर सिद्ध करो ॥

१२. यदि किसी चतुर्भुज के दो बाहु समानान्तर हों और शेष दो बाहु समान हों परन्तु समानान्तर न हों तो सिद्ध करो कि सन्मुख कोण मिलकर दो समकोण के समान होंगे और कर्ण भी समान होंगे ॥

तीसरा भाग ।

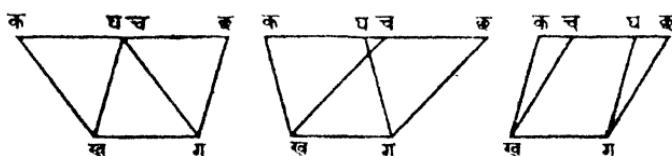
समानान्तर चतुर्भुज और त्रिकोण के क्षेत्रफल का प्रकरण ।

अबतक दो चित्रों के समान होने का अर्थ यह था कि वे सब प्रकार से समान हैं ॥

यूक्लिड की पहिली पुस्तक के तृतीय भाग में हम उन त्रिकोणों और समानान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफलों विचार करेंगे जिनका सब प्रकार से समान होना अवश्य नहीं है ॥

[स्वयं सिद्ध ८ जो कहता है कि परिमाण जो एक दूसरे को आच्छादन करलें समानता की अन्तिम सीमा वा पहिचान हैं ॥ अब चित्र जो सब प्रकार से समान नहीं बिना रूप बदले एक दूसरे को आच्छादन नहीं कर सकते इसलिये वर्त्तमान भाग के लिये सीधी आच्छादन की रीति अयोग्य है ॥

परन्तु हम को यूक्लिड के साध्य ३५ के प्रमाण से ज्ञात होगा कि दो चित्र जो सब प्रकार से समान नहीं किसी तीसरे चित्र से ऐसा सम्बन्ध रखते हों कि उनके क्षेत्रफल की समताका अनुमान हो सकता है]

संज्ञा ।

१. किसी समचतुर्भुज के एक संज्ञा बाहु को यदि उसका आधार मानलें तो उसकी ऊंचाई सम्मुख बाहु से आधार पर लम्ब होगी ॥

२. किसी त्रिकोण के एक बाहु को यदि उसका आधार मानलें तो उसकी ऊंचाई सम्मुख शीर्ष से आधार पर लम्ब के समान होगी ॥

साध्य ३५ प्रमेयोपपाद्य ।

एक ही आधार पर और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में जो समानान्तर चतुर्भुज होते हैं वे क्षेत्रफल में समान होते हैं ॥

समानान्तर चतुर्भुज कखगघ चखगङ एक ही आधार खग पर और एक ही समानान्तर रेखाओं खग कङ के बीच में हैं तो समानान्तर चतुर्भुज कखगघ क्षेत्रफल में समानान्तर चतुर्भुज चखगङ के समान होगा ॥

दशा १ यदि दिये हुए समानान्तर चतुर्भुजों के आधार खग के सन्मुख बाहु एक ही बिन्दु घ पर समाप्त हों, तो क्योंकि प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज त्रिकोण खघग का दूना है १. ३४.

इसलिये वे दोनों परस्पर समान हैं स्वयं. ६.

दशा २ – परन्तु यदि बाहु कघ चङ आधार खग के सन्मुख एक बिन्दु पर न समाप्त हों तो क्योंकि कखगघ एक समानान्तर चतुर्भुज है ॥

इसलिये कघ सन्मुख बाहु खग के समान है १. ३४.

और इसीलिये चङ समान खग के है निदान कघ चङ समान हैं स्व. १

इसलिये सकल या शेष चक सकल या शेष ङघ के समान है ॥

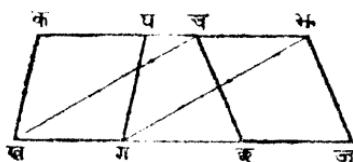
फिर क्योंकि त्रिकोण ङघग चकख में ङघ समान चक के है सिद्ध.

और घग सन्मुख बाहु कख के समान है १. ३४.

और बाह्य कोण ङघग सन्मुख अन्तःकोण चकख के समान है १. २९.

इसलिये त्रिकोण ङघग त्रिकोण चकख के समान है १. ४.

सकल चित्र कख गङ में से त्रिकोण ङघग निकाल डालो और उसी

चित्र में से समान त्रिकोण चकख निकाल डालो तो शेष भाग समान होंगे ॥ स्व. ३.

अर्थात् समानान्तर चतुर्भुज कखगघ समानान्तर चतुर्भुज चखगक के समान है ॥

साध्य ३६ प्रमेयोपपाद्य।

समान आधार पर एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित समानान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में समान होते हैं ॥

कखगघ चछजझ समानान्तर चतुर्भुज समान आधार खग छज पर और एक ही समानान्तर रेखाओं कझ खज के बीच में स्थित हैं तो समानान्तर चतुर्भुज कखगघ समानान्तर चतुर्भुज चछजझ के समान होगा ॥

तनावट — खच गझ को जोड़ दो ॥

प्रमाण — क्योंकि फिर खग छज समान हैं क. अर्थ.

और छज सन्मुख बाहु चझ के समान है १. ३४.

इसलिये खग समान चझ के है स्व. १.

और वह उसके समानान्तर भी है क. अर्थ.

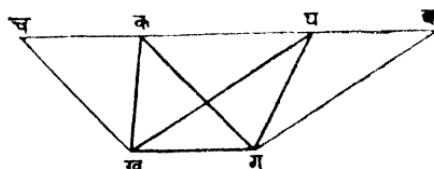
इसलिये खच और गझ जो उनके एक ही ओर के सिरों को मिलाती हैं समान और समानान्तर हैं १. ३३.

इसलिये चखगझ एक समानान्तर चतुर्भुज है १. २६.

अब समानान्तर चतुर्भुज कखगघ समानान्तर चतुर्भुज चखगझ के समान है क्योंकि वह एक आधार खग पर और एक ही समानान्तर रेखा खग कझ के बीच में स्थित हैं १. ३५.

और समानान्तर चतुर्भुज चकजभ समान है चखगभ के क्योंकि वह एक आधार चभ पर और एक ही समानान्तर रेखा चभ, खज के बीच में स्थित हैं १. ३५.

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज कखगघ समानान्तर चतुर्भुज चकजभ के समान है स्व. १.

अन्तिम दो साध्यों से हम यह सिद्धांत निकालते हैं कि

(१) एक आयत और एक समानान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में समान होते हैं यदि उनके आधार और ऊंचाई समान हों ॥

(२) समानान्तर चतुर्भुज जिन के आधार और ऊंचाई समान होते हैं क्षेत्रफल में समान होते हैं ॥

(३) समान ऊंचाई वाले दो समानान्तर चतुर्भुजों में बड़ा वह होता है जिसका आधार बड़ा हो ॥ और समान आधार वाले दो समानान्तर चतुर्भुजों में बड़ा वह होता है जिसकी ऊंचाई बड़ी हो ॥

साध्य ३७ प्रमेयोपपाद्य ।

त्रिकोण जो एक आधार पर एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हों क्षेत्रफल में समान होते हैं ॥

त्रिकोण कखग घखग एक ही आधार खग पर और एक ही समानान्तर रेखा खग कघ के बीच में स्थित हैं तो त्रिकोण कखग त्रिकोण घखग के समान होगा ॥

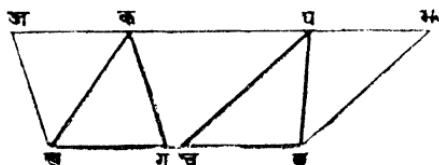
बनावट -- ख से खच समानान्तर गक के खींचो और कघ को च तक बढ़ाओ १. ३१.

गसे गछ समानान्तर खग के इस प्रकार से खींचो कि कघ का बढ़ाने से बिन्दु छ पर मिले १. ३१.

प्रमाण — तो प्रत्येक चित्र चखगक — घखगछ समानान्तर चतुर्भुज हैं बनावट

और चखगक समान घखगछ के है क्योंकि वह एक आधार खग पर और एक ही समानान्तर रेखा खग चछ के बीच में स्थित हैं १. ३५.

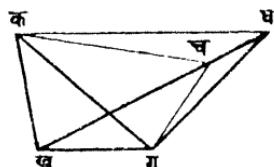
और त्रिकोण कखग समानान्तर चतुर्भुज चखगक का आधा है क्योंकि कर्ण कख उस के दो समभाग करता है १. ३४.

और त्रिकोण घखग समानान्तर चतुर्भुज घखगछ का आधा है क्योंकि कर्ण घग उसके दो समभाग करता है १. ३४.

परन्तु समान वस्तुओं के आधे समान होते हैं स्व. ७.

इसलिये त्रिकोण कखग त्रिकोण घखग के समान है ॥

[अभ्यास के लिये देखो पत्र]

साध्य ३८ प्रमेयोपपाद्य।

त्रिकोण जो समान आधार पर एक ही समानान्तर रेखाओं के अन्तर पर स्थित हो क्षेत्रफल में समान होंगे ॥

कखग घचछ दो त्रिकोण समान आधार खग चछ पर एक ही समानान्तर रेखा खछ कघ के बीच स्थित हैं तो त्रिकोण कखग घचछ समान होंगे ॥

अनावट — खसे खज समानान्तर गक को इस प्रकार से खींचो कि बढ़े हुए घक से ज पर मिले १. ३१.

और क से कभ समानान्तर चघ को इस प्रकार से खींचो कि बढ़े हुए कघ से भ पर मिले १. ३१.

प्रमाण — तो प्रत्येक चित्र जखगक घचकभ समानान्तर चतुर्भुज है अनावट

और जखगक समान घचकभ के है क्योंकि वह समान आधार खग चक पर एक ही समानान्तर रेखा खक जभ के बीच स्थित हैं १. ३६.

और त्रिकोण कखग समानान्तर चतुर्भुज जखगक का आधा है क्योंकि कर्ण कख उसको दो समभाग करता है १. ३४.

और त्रिकोण घचक समानान्तर चतुर्भुज घचकभ का आधा है क्योंकि कर्ण घक उसको दो समभाग करता है १. ३४

परन्तु समान पदार्थों के आधे समान होते हैं स्वं. ७.

इसलिये त्रिकोण कखग त्रिकोण घचक के समान है ॥

इस साध्य से हम अनुमान करते हैं कि

(१) समान आधार और समान ऊंचाई वाले त्रिकोण क्षेत्रफल में समान होते हैं ॥

(२) समान ऊंचाई वाले दो त्रिकोणों में बड़े आधार वाला त्रिकोण बड़ा होता हैं समान आधार वाले दो त्रिकोणो में बड़ी ऊंचाई वाला त्रिकोण बड़ा होता है ॥

[अभ्यास के लिये देखो पत्र]

साध्य ३९ प्रमेयोपपाद्य।

यदि समान त्रिकोण एक ही आधार पर उसके एक ही ओर हों तो वे उन्हीं समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित होंगे॥

दो त्रिकोण कखग घखग जो एक ही आधार खग पर उसके एक ही ओर स्थित हैं क्षेत्रफल में समान हैं तो वे समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित होंगे अर्थात् कघ समानान्तर खग के होगा॥

बनावट — क्योंकि यदि क घ समानान्तर ख ग के न हो तो क से क च समानान्तर ख ग के इस प्रकारसे खींचो कि वह ख घ से वा बढ़े हुए ख घ से च पर मिले॥ १. ३१.

च ग को जोड़ दो॥

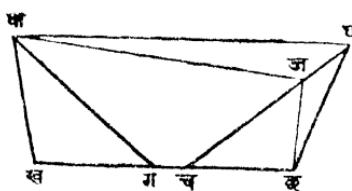
प्रमाण — अब त्रिकोण क ख ग त्रिकोण च ख ग के समान है क्योंकि वे एक आधार ख ग पर समानान्तर रेखा ख ग क च के बीच में स्थित हैं॥ १. ३७.

परन्तु त्रिकोण क ख ग त्रिकोण घ ख ग के समान है क. अथ.

इस लिये त्रिकोण घ ख ग त्रिकोण च ख ग के समान है॥

समस्त अपने भाग के समान है जो असम्भव है॥

इस लिये क च समानान्तर ख ग के नहीं है॥

इसी प्रकार से सिद्ध कर सकते हैं कि सिवाय क घ के और कोई रेखा जो क से खींची जाय समानान्तर ख ग के नहीं हो सकती इस लिये कघ समानान्तर खग के है॥

इस साध्य से यह अनुमान करते हैं॥

समान त्रिकोण जो एकही आधार पर हों समान ऊंचाई वाले होते हैं॥

[अभ्यास के लिये देखो पत्र १८]

साध्य ४० प्रमेयोपपाद्य ।

समान त्रिकोण जो समान आधार पर उसके एकही ओर एक ही सीध में हों वे एकही समानान्तर रेखाओंके बीच में स्थित होंगे ॥

त्रिकोण क ख ग, घ च छ जो समान आधार ख ग च छ पर एकही सीध ख छ में और उसके एकही ओर हैं क्षेत्रफल में समान हैं तो वे एक ही समानान्तर रेखाओंके बीच में स्थित होंगे अर्थात् क घ यदि मिला दिये जांय तो क घ समानान्तर ख छ के होगा ॥

बनावट -- क्योंकि यदि क घ समानान्तर ख छ के न हो तो यदि सम्भव हो क से क ज समानान्तर ख छ के इस प्रकार से खींचो कि च घ से या बढ़े हुए च घ से ज पर मिले १. ३१.

ज छ को मिलादो

प्रमाण -- अब त्रिकोण क ख ग ज च छ समान हैं क्योंकि वे समान आधार ख ग, च छ पर एक ही समानान्तर रेखा ख छ, क ज के बीच में हैं ॥ १. ३८.

परन्तु त्रिकोण क ख ग त्रिकोण घ च छ के समान हैं ॥ क. अर्थ.

इस लिये त्रिकोण घ च छ त्रिकोण ज च छ के समान है ॥

अर्थात् सकल अपने भाग के समान है जो असम्भव है ॥

इस लिये क ज समानान्तर ख छ के नही है ॥

इसी प्रकार से सिद्ध कर सकते हैं कि सिवाय क घ के क से और कोई सीधी रेखा ख छ के समानान्तर नही खींची जा सकती है ॥

इसलिये कघ समानान्तर ख छ के हैं

इस साध्य से अनुमान करते हैं कि

(१) समान त्रिकोण समान आधार पर समान ऊंचाई वाले होते हैं ॥

(२) समान ऊंचाई वाले समान त्रिकोण समान आधार पर होते हैं ॥

साध्य ३७-४० पर अभ्यास॥

संज्ञा - तीनोंरेखाएं जो किसी त्रिकोण के कोणों को सन्मुख बाहुओं के मध्य बिन्दु से मिलाती हैं त्रिकोण का मध्यस्थ कहाती हैं॥

साध्य ३७ पर।

१. साध्य ३७ के चित्रमें यदि क ग ख घ परस्पर ट पर मिलें तो सिद्ध करो कि

(१) त्रिकोण क ट ख घ ट ग क्षेत्रफल में समान हैं॥

(२) चतुर्भुज च ख ट क क्ष ग ट घ समान हैं॥

२. पु. १ साध्य १६ के चित्र में सिद्ध करो कि त्रिकोण क ख ग क्ष ख ग क्षेत्रफल में बराबर हैं॥

३. दिये हुये त्रिकोण के आधार पर दूसरा त्रिकोण बनाओ जो क्षेत्रफल में पहिले के समान हो और जिसका शीर्ष एक दी हुई सीधी रेखा पर स्थित हो॥

४. दिये हुए त्रिकोण के आधार पर समद्विबाहु त्रिकोण बनाओ जो क्षेत्रफल में दिये हुवे त्रिकोण के समान हो॥

साध्य ३८ पर।

५. प्रत्येक मध्यस्थ किसी त्रिकोण के क्षेत्रफल के दो सम भाग करता है॥

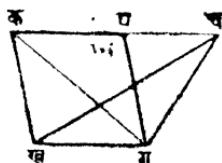
६. समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण उसको समान क्षेत्रफल वाले चार त्रिकोणों में बांटते हैं॥

७. क ख ग एक त्रिकोण है और उसके आधार ख ग के दो सम भाग होते हैं यदि र कोई बिन्दु मध्यस्थ कम में हो सिद्ध करो कि त्रिकोण कखर कगर क्षेत्रफल में समान होंगे॥

८. समानान्तर चतुर्भुज क ख ग घ के कर्ण क ग में स एक बिन्दु लिया गया है और सख सघ खींचे गये हैं सिद्ध करो कि त्रिकोण खकस त्रिकोण घकस के समान है॥

९. यदि एक त्रिकोण के दो बाहु दूसरे त्रिकोण के दो बाहुओं के पृथक् २ समान हों और इन बाहुओं के अन्तर्गत कोण मिल कर दो समकोण के समान हों तो त्रिकोण क्षेत्रफल में समान होंगे॥

साध्य ३९ पर ।

१०. सीधी रेखा जो किसी त्रिकोण के दो बाहु के मध्य विन्दुओं को मिलाती है तीसरी बाहु के समानान्तर होती है ॥

११. यदि दो सीधी रेखा क ख ग घ विन्दु त पर एक दूसरे को इस प्रकार से काटें कि त्रिकोण क त ग घ त ख समान हों तो सिद्ध करो कि क घ ग ख समानान्तर हैं ॥

साध्य ४० पर ।

१२. साध्य ३९ से पत्र ७७ के चित्र में क च क छ को मिलाकर साध्य ४० को सिद्ध करो ॥

साध्य ४१ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि एक त्रिकोण और एक समानान्तर चतुर्भुज एकही आधार पर एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हों तो समानान्तर चतुर्भुज त्रिकोण का दूना होगा ॥

समानान्तर चतुर्भुज क ख ग घ और त्रिकोण च ख ग एकही आधार ख ग पर और एक ही समानान्तर रेखा ख ग क च के बीच स्थित हैं तो समानान्तर चतुर्भुज क ख ग घ त्रिकोण च ख ग का दूना होगा ॥

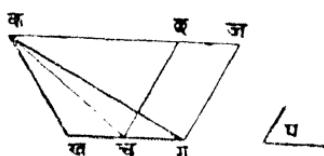
बनावट — क ग को मिला दो ॥

प्रमाण — अब त्रिकोण क ख ग त्रिकोण च ख ग के समान है क्योंकि वे एकही आधार ख ग पर और एक ही समानान्तर रेखा ख ग क च के बीच में स्थित हैं १.३७

परन्तु समानान्तर चतुर्भुज क ख ग घ त्रिकोण क ख ग का दूना है क्योंकि क ग समानान्तर चतुर्भुज के दो सम भाग करता है १.३४

इसलिये समानान्तर चतुर्भुज क ख ग घ त्रिकोण च ख ग का दूना है ॥

अभ्यास।

१. क ख ग घ एक समानान्तर चतुर्भुज है और म र बाहु क घ ख ग के मध्य विन्दु हैं यदि म र में या बढ़े हुए म र में ल कोई विन्दु हो तो सिद्ध करो कि त्रिकोण क ल ख समानान्तर चतुर्भुज क ख ग घ का एक चौथाई भाग है ॥

२. दिये हुये वर्ग के समान एक समकोण समद्विबाहु त्रिकोण बनाओ ॥

३. यदि क ख ग घ एक समानान्तर चतुर्भुज हो और घ ग क घ में कोई विन्दु म र पृथक् २ हों तो सिद्ध करो कि त्रिकोण क म ख ख र ग क्षेत्रफल में समान हैं ॥

४. क ख ग घ कोई समानान्तर चतुर्भुज है और य उसके भीतर एक विन्दु है सिद्ध करो कि त्रिकोण य क ख य ग घ का जोड़ समानान्तर चतुर्भुज का आधा होगा ॥

साध्य ४२ वस्तुपपाद्य।

दिये हुए त्रिकोण के समान एक समानान्तर चतुर्भुज बनाओ जिसका एक कोण दिये हुए कोण के समान हो ॥

क ख ग एक दिया हुआ त्रिकोण है और घ दिया हुआ कोण है क ख ग के समान एक समानान्तर चतुर्भुज बनाओ जिसका एक कोण घ के समान हो ॥

बनावट — ख ग को घ पर दो समभाग करो १.१०

ख घ में च पर कोण ग च छ कोण घ के समान बनाओ १.२३

और क में क छ ज समानान्तर ख ग के खींचो १.३१

और ग में ग ज समानान्तर च छ के खींचो तो छ च ग ज

यथोचित समानान्तर होगा ॥ क च को मिला दो ॥

प्रमाण — अब त्रिकोण क ख च क च ग समान हैं क्योंकि वे समान आधार ख च च ग पर और एक ही समानान्तर रेखाओं के बीच में स्थित हैं इस लिये त्रिकोण क ख ग त्रिकोण क च ग का दूना है ॥ १.३८

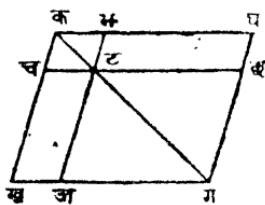
परन्तु छ च ग ज समानान्तर चतुर्भुज त्रिकोण क च ग का दूना है क्योंकि वह एक ही आधार च ग पर और एक ही समानान्तर रेखाओं च ग क ज के बीच में स्थित हैं ॥ १.४१

इस लिये समानान्तर चतुर्भुज छ च ग ज त्रिकोण क ख ग के समान है॥

और उसका एक कोण ग च छ दिये कोण घ के समान है ॥

अभ्यास ।

१. दिये हुये वर्ग के समान उसी आधार पर एक समानान्तर चतुर्भुज बनाओ जिसका एक कोण आधे समकोण के समान हो ।

२. दिये हुए समानान्तर चतुर्भुज के समान उसी आधार पर एक विषम कोण सम चतुर्भुज बनाओ ॥ बनावट कब (किस दशा में) असम्भव है ? ॥

संज्ञा — यदि किसी समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण में कोई विन्दु लिया जाय और उसमें से होती हुई रेखा समानान्तर चतुर्भुज के बाहु के समानान्तर खींची जांय तो उन चार समानान्तर चतुर्भुजों में से जो इस प्रकार बनेंगे दो जिन में कर्ण है कर्ण के निकटवर्त्ती समानान्तर चतुर्भुज कहाते हैं और शेष दो जिनके साथ मिलकर यह दोनों सारे चित्र के समान होते हैं कर्ण के निकटवर्त्ती समानान्तर चतुर्भुजों के परि-

पूरक कहाते हैं ॥ यथा निम्नलिखित चित्र में क च ट भ क ज ग ढ़ कर्ण क ग के निकटवर्त्ती समानान्तर चतुर्भुज हैं और भ ट ढ़ घ च ख ज ट इन के परिपूरक हैं ॥

नोट — समानान्तर चतुर्भुज प्रायः दो अक्षरों से पुकारा जाता है जो उसके सम्मुख कोणों पर स्थित हों ॥

साध्य ४३ प्रमेयोपपाद्य ।

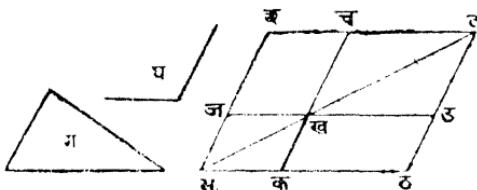
किसी समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण के निकटवर्त्ती समानान्तर चतुर्भुजों के परिपूरक समान होते हैं।क ख ग घ एक समानान्तर चतुर्भुज है और कर्ण क ग के निकटवर्त्ती समानान्तर चतुर्भुज च भ ज ढ़ के परिपूरक ट घ टख हैं तो परिपूरक खट परिपूरक ट घ के समान होगा ॥

प्रमाण — क्योंकि च भ एक समानान्तर चतुर्भुज है और क ट उसका कर्ण है

इसलिये त्रिकोण क च ट त्रिकोण क भ ट के समान है १.३४

और इसी लिये त्रिकोण ट ज ग ट ढ़ ग समान है

इस लिये त्रिकोण क च ट ट ज ग मिल कर त्रिकोण क भ ट ट ढ़ ग के समान हैं ॥ परन्तु सकल त्रिकोण क घ ग सकल त्रिकोण कखग के समान है क्योंकि कर्ण क ग समानान्तर चतुर्भुज क ख ग घ के दो समभाग करता है १.३४

इस लिये शेष परिपूरक ख ट शेष परिपूरक ट घ के समान है ॥

अभ्यास ।

साध्य ४३ के चित्र में सिद्ध करो कि

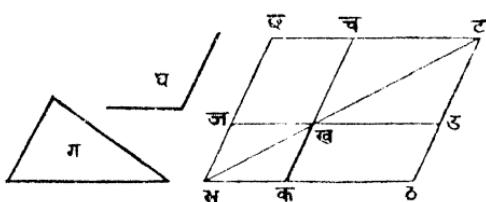
(१) समानान्तर चतुर्भुज च घ और ख भ परस्पर समान हैं

(२) यदि ट घ मिलाये जांय तो त्रिकोण क ट ख क ट घ समान होंगे ॥

साध्य ४४ वस्तूपपाद्य ।

दो हुई सीधी रेखा पर एक समानान्तर चतुर्भुज बनाओ जो एक दिये हुए त्रिकोण के समान हो और उसका एक कोण दिये हुए कोण के समान हो ॥

क ख दी हुई सीधी रेखा है और ग दिया हुआ त्रिकोण है और घ दिया हुआ कोण है क ख पर एक समानान्तर चतुर्भुज ग त्रिकोण के समान बनाओ और उसका एक कोण घ के समान हो ॥

बनावट — क ख को बढ़ा कर उसपर एक समानान्तर चतुर्भुज ख च छ ज त्रिकोण ग के समान बनाओ और उसका एक कोण च ख ज कोण घ के समान हो   १.२२ औ १.४२*

क से क भ समानान्तर ख ज या च छ के खींचो कि वह बढ़े हुए छ ज से भ पर मिले   १.३१

भ ख को मिला दो ॥

*बनावट का यह पद इस प्रकार होता है कि क ख को बढ़ा कर उसपर एक त्रिकोण बनाया जाय जिसके बाहु पृथक् २ त्रिकोण ग के बाहु के समान हों (१.२२) और फिर इस बनाये त्रिकोण के समान एक समानान्तर चतुर्भुज बनाया जाय जिस का एक कोण दिये कोण के समान हो ॥

फिर क्योंकि क भ और च क्र समानान्तर हैं और भ क्र उनसे मिलता है इस लिये कोण क भ क्र भ क्र च मिल कर दो समकोणों के समान हैं १.२९

इस लिये कोण ख भ क्र भ क्र च मिल कर दो समकोणोंसे कम हैं इस लिये भ ख और क्र च ख और च की ओर बढ़ाने से मिलेंगी उनको बढ़ाओ कि ट पर मिलें ॥ स्व.१२

ट से ट ठ समानान्तर चक या क्र भ के खींचो १.३१

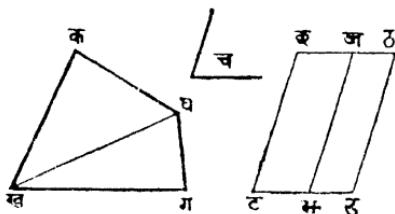
भ क ज ख को बढ़ाओ कि ट ठ से विन्दु ठ और ड पर मिलें

तो ख ट यथोचित समानान्तर चतुर्भुज होगा ॥

प्रमाण – अब क्र भ ठ ट एक समानान्तर चतुर्भुज है और कर्ण भ ट के निकटवर्त्ती समानान्तर चतुर्भुजों के परिपूरक ठ ख ख क्र हैं

इस लिये ठ ख ख क्र परस्पर समान हैं

परन्तु त्रिकोण ग समान है ख क्र के (बनावट)

इस लिये ठ ख भी ग के समान है ॥

और क्योंकि कोण ज ख च आधार सन्मुख कोण क ख ड के १.१५ समान है और कोण घ के भी समान है बनावट

इस लिये कोण क ख ड कोण घ के समान है ॥ इस लिये समानान्तर चतुर्भुज ठ ख जो क ख पर बताया गया है त्रिकोण ग के समान है और उसका एक कोण घ के समान है ॥

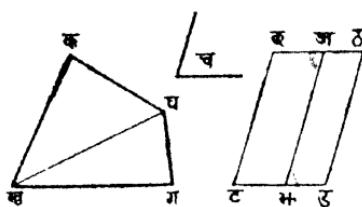
साध्य ४५ वस्तूपपाद्य ।

दिये हुए सरल रेखा विशिष्ट चित्र के समान एक समानान्तर चतुर्भुज ऐसा बनाओ जिसका एक कोण दिये कोण के समान हो ॥

क ख ग घ एक सरल रेखा विशिष्ट चित्र दिया है और च दिया हुआ कोण है ॥

क ख ग घ के समान एक समानान्तर चतुर्भुज बनाना है जिसका एक कोण कोण च के समान हो ॥ मान लो कि सरल चित्र चतुर्भुज है ॥

बनावट — ख घ को जोड़ दो ॥ समानान्तर चतुर्भुज क्ष झ समान त्रिकोण क ख घ के बनाओ ॥ और उसका कोण क्ष ट झ कोण च के समान हो 1.42

ज झ पर समानान्तर चतुर्भुज ज ड त्रिकोण घ ख ग के समान बनाओ और उसका एक कोण ज झ ड कोण च के समान हो 1.44

तो क्ष ट ड ठ यथोचित समानान्तर चतुर्भुज होगा ॥

प्रमाण — क्योंकि प्रत्येक कोण ज झ ड क्ष ट झ कोण च के समान है इस लिये कोण क्ष ट झ कोण ज झ ड के समान है इन दोनों समान पदार्थों में कोण ज झ ट जोड़ दो तो दो कोण क्ष ट झ ज झ ट मिल कर कोण ज झ ड, ज झ ट के समान हैं ॥ परन्तु क्योंकि क्ष ट-ज झ समानान्तर हैं और ट झ उनसे मिलता है इस लिये कोण क्ष ट झ ज झ ट मिल कर दो समकोण के समान हैं ॥ 1.28

इस लिये कोण ज झ ट ज झ ड भी दो समकोण के समान हैं इस लिये ट झ झ ड एक ही सीध में हैं 1.14

फिर क्योंकि ट ड-क ठ समानान्तर हैं और झ ज उनसे मिलता है इस लिये एकान्तर कोण ड झ ज झ ज क परस्पर समान हैं १.२९

इन दो समान कोणों में कोण झ ज ठ जोड़ दो और क ज झ

तो कोण ड झ ज, झ ज ठ मिलकर कोण झ ज ठ के समान हैं

परन्तु झ ड ज ठ समानान्तर हैं और झ ज उनसे मिलती है इस लिये कोण ज झ ड और झ ज ठ मिल कर दो समकोणों के समान हैं १.९२

इसलिये कोण झ ज क और झ ठ ज भी मिलकर दो समकोणों के समान हैं

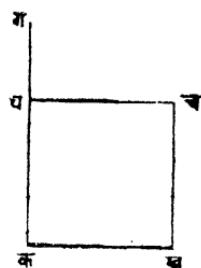
इस लिये क ज ज ठ एक ही सीध में हैं १.१४

और क्योंकि ट क और ड ठ दोनो झ ज के समानान्तर हैं बनावट

इस लिये ट क समानान्तर ड ठ के है १.३०

और ट ड समानान्तर क ठ के है बनावट

इस लिये क ट ड ठ एक समानान्तर चतुर्भुज है संज्ञा. २६

और क्योंकि समानान्तर चतुर्भुज क झ त्रिकोण क घ ख के समान है बनावट

और त्रिकोण घ ख ग के समान ज ड समानान्तर चतुर्भुज है बनावट

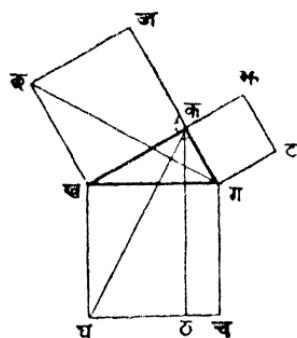
इस लिये सकल समानान्तर चतुर्भुज क ट ड ठ सकल चित्र क ख ग घ के समान है और कोण क ट ड कोण च के समान है ॥

इसी प्रकार के पदों से चार से अधिक बाहु वाले सरल रेखा त्रिशिप्त चित्र के समान एक समानान्तर चतुर्भुज बना सकते हैं ॥

साध्य ४६ वस्तूपपाद्य ।

दी हुई सीधी रेखापर एक वर्ग बनाओ क ख दी हुई सीधी रेखा है क ख पर एक वर्ग बनाओ ॥

बनावट — क से क ग खींचो इस प्रकार से कि वह क ख के साथ
समकोण बनावे १.११
और क घ को समान क ख के बनाओ १.३
घ से घ च समानान्तर क ख के खींचो १.३१
और ख से ख च समानान्तर क घ के इस प्रकार से खींचो कि घ च से च पर मिले ॥ तो क घ च ख एक वर्ग होगा ॥

प्रमाण — क्योंकि क घ च ख एक समानान्तर चतुर्भुज है बनावट
इस लिये क ख समान घ च के और क घ समान घ च के है १.३४
परन्तु क घ समान क ख के बनाया गया है इस लिये चारों सीधी रेखायें क ख क घ खच चख परस्पर समान हैं अर्थात् चित्र क घ च ख समान बाहु है ॥

फिर क्योंकि क ख घ च समानान्तर हैं और क घ उनसे मिलती है इस लिये कोण ख क घ-क घ च मिल कर दो समकोण के समान हैं १.२९
परन्तु ख क घ समकोण बनाया गया है इस लिये कोण क घ च भी एक समकोण है ॥ और समानान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं १.३४

इस लिये प्रत्येक कोण घ च ख च ख क समकोण के समान हैं
इस लिये सरल रेखा विशिष्ट चित्र क घ च ख समकोण चित्र है
इस लिये यह वर्ग है और क ख पर बनाया गया है ॥
अनुमान — यदि किसी समानान्तर चतुर्भुज का एक कोण समकोण हो तो उसके सब कोण समकोण होंगे ॥

साध्य ४७ प्रमेयोपपाद्य ।

किसी समकोण त्रिकोण में कर्ण के ऊपर जो वर्ग बनाया जाय वह और दो बाहुओंपर जो वर्ग बनाये जांय उनके जोड़ के समान होता है

कखग एक समकोण त्रिकोण है जिसमें कोण खकग समकोण है तो कर्ण खग पर जो वर्ग बनाया जायगा वह और दो बाहु खक कग पर जो वर्ग बनाये जांयगे उनके जोड़ के बराबर होगा ॥

बनावट — खग पर खगचघ वर्ग बनाओ और खक कग पर वर्ग खकजह कगटझ बनाओ ॥ क से कठ समानान्तर खघ या गच के खींचो और क घ हग को जोड़दो ॥

प्रमाण — फिर क्योंकि प्रत्येक कोण खकग खकज समकोण है
इस लिये गक कज एक ही सीध में हैं १.१४

अब कोण गखघ कोण कखक के समान है क्योंकि उनमें से प्रत्येक कोण समकोण है ॥ इन दोनों में कखग जोड़ दो तो सकल कोण कखघ सकल कोण कखग के समान है फिर क्योंकि त्रिकोण कखघ-कखग में कख समान कख के है और खघ समान खग के है और कोण कखघ कोण कखग के समान है इस लिये त्रिकोण कखग त्रिकोण कखग के समान है　　१.४

अब समानान्तर चतुर्भुज खठ त्रिकोण कखघ का दूना है क्योंकि वह एक ही आधार खघ पर और एक ही समानान्तर रेखा खघ कठ के बीच में स्थित हैं　　१.४१

और वर्ग जख त्रिकोण कखग का दूना है क्योंकि वह एक ही आधार जख पर और एक ही समानान्तर रेखा कख-जग के बीच में स्थित है १.४१

परन्तु समान परिमाण के दूने समान होते हैं　　स्व.६

इस लिये समानान्तर चतुर्भुज खठ वर्ग जख के समान है इसी प्रकार से कच खट को मिलाने से सिद्ध कर सकते हैं कि वर्ग गभ समानान्तर चतुर्भुज गठ के समान है ॥ इस लिये सकल वर्ग खच वर्ग जख भग के जोड़ के समान है अर्थात् खग कर्ण पर जो वर्ग बनाया गया है वह खक कग के ऊपर जो वर्ग बनाये गये हैं उनके जोड़के समान हैं ॥

नोट – इस साध्य को सिद्ध करने के लिये यह अवश्य नहीं है कि वर्ग क्षेत्र त्रिकोण कखग के बाहर ही बनाये जांय और क्योंकि प्रत्येक वर्ग त्रिकोण के बाहर या भीतर बना सकते है इस लिये सिद्ध किया जा सकता है कि २ × २ × २ आठ भिन्न बनावटें सम्भव है ॥

अभ्यास ।

१. इस साध्य के चित्र में सिद्ध करो कि –

(१) यदि खज गभ जोड़े जांय तो यह सीधी रेखा समानान्तर होगी ॥

(२) विन्दु छ क और ट एक सीध में हैं ॥

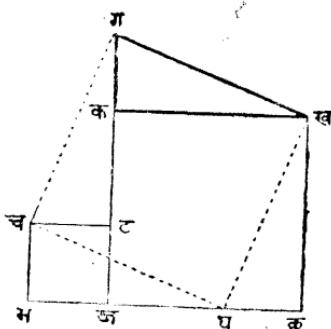
(३) छग कघ एक दूसरे के साथ समकोण बनाते हैं ॥

(४) यदि जझ टच छघ जोड़े जांय तो त्रिकोण जकझ दिये हुये त्रिकोण कखग के सब प्रकार से समान होगा और प्रत्येक त्रिकोण छखघ टगच त्रिकोण कखग के क्षेत्रफल में समान होंगे ॥

[देखो अभ्यास ९ पत्र १३]

२. किसी त्रिकोण कखग के बाहु कख कग पर वर्ग कखछज कगटझ दोनों त्रिकोण को भीतर की ओर या दोनों उसके बाहर की ओर बनाये गये हैं सिद्ध करो कि सीधी रेखा खझ गज परस्पर समान होगी ।

३. किसी त्रिकोण कखग के बाहु पर समत्रिबाहु त्रिकोण खगम गकर कखल सब त्रिकोण के बाहर की ओर या भीतर की ओर बनाये गये हैं सिद्ध करो कि कम खर गल परस्पर समान होंगे ॥

४. किसी दिये हुए वर्ग के कर्ण पर जो वर्ग बनाया जाय वह दिये वर्ग का दूना होता है ॥

५. कखग एक समत्रिबाहु त्रिकोण है और कम क से खग पर लम्ब डाला गया है सिद्ध करो कि कम पर जो वर्ग बनाया जाय वह खम पर के वर्ग से तिगुना होगा ॥

६. एक वर्ग बनाओ जो दिये हुए दो वर्गों के जोड़ के समान हो ॥

७. कखग त्रिकोण के शीर्ष क से कम आधार पर लम्ब डाला गया है सिद्ध करो कि बाहु कख कग पर जो वर्ग बनाये जांये उनका अन्तर समान होगा उन वर्गों के अन्तर के जो आधार के भाग गम खग पर बनाये जायें ॥

८. यदि किसी त्रिकोण कखग के भीतर किसी विन्दु त से बाहु खग गक कख पर लम्ब तम तर तल पृथक २ डाले जायें तो सिद्ध करो कि भाग फल खम गर पर जो वर्ग बनाये जांयें उनका जोड़ समान होगा उन वर्गों के जोड़ के जो भाग कर गम खल पर बनाये जायें ॥

साध्य ४७ द्वितीय प्रमाण।

गकख एक समकोण त्रिकोण है जिसमें क पर समकोण है तो कथा गख पर वर्ग समान होगा खक कग पर के वर्गों के जोड़ के ॥

कख पर वर्ग कखछज बनाओ १.४६

छज ओ जक में छघ जट पृथक् २ प्रत्येक समान कग के काटो १.३.

जट पर वर्ग जटचभ बनाओ १.४६

तो भज और ज छ एक सीध में हैं १.१४

गच चघ घख को जोड़ दो ॥

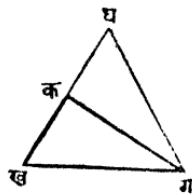
पहिले यह सिद्ध किया जायगा कि चित्र गचघख वर्ग है गख पर ॥

अब गक समान टज के है इन में कट जोड़ो ॥ इस लिये गट समान कज के है ॥

इसी प्रकार घभ समान जछ के है इस लिये चार रेखाएं खक गट घभ खछ परस्पर समान हैं ॥ फिर क्योंकि त्रिकोण खकग और गटच में खक समान गट के सिद्ध किया गया है और कग समान टच के है (बनावट) और अन्तर्गत कोण खकग अन्तर्गत कोण गटच के समान है क्योंकि वह समकोण हैं ॥ इस लिये त्रिकोण खकग गटच सब प्रकार से समान हैं १.४

इसी प्रकार से चार त्रिकोण खकग गटच घभच खछघ सब प्रकार से समान सिद्ध हो सकते हैं इस लिये चार सीधी रेखा में खग गच

चघ घख सब परस्पर समान हैं फिर कोण गखक कोण घखक के समान है सिद्ध

दोनों में कोण कखघ जोड़ो तो कोण गखघ कोण कखक के समान है इस लिये कोण गखघ एक समकोण है इस लिये चित्र गचघख वर्ग है खग पर ॥ और चझजट वर्ग है कग पर ॥ संज्ञा २८

अब वर्ग गचघख दो त्रिकोण खकग गटच और सरल चित्र कटचघख से मिलकर बना है इस लिये वर्ग गचघख त्रिकोण चझघ घकख और इसी सरल चित्र के मिलाकर समान है परन्तु यह वर्ग चझजट कजकख के समान हैं इस लिये वर्ग गचघख समान है वर्ग चझजट कजकख के जोड़के ॥ अर्थात् कर्ण खग पर वर्ग समान है बाहु गक कख पर वर्ग के जोड़के ॥

देखो वर्ग के निम्न लिखित गुण यूक्लिड ने वर्णन नहीं किये हैं परन्तु आगे के प्रमाण में काम आते है (देखो १.४८)

(१) समान सीधी रेखापर वर्ग समान होते हैं ॥

(२) समान वर्ग समान सीधी रेखा पर स्थित होते हैं ॥

साध्य ४८ प्रमेयोपपाद्य ।

यदि किसी त्रिकोण के एक बाहु पर जो वर्ग बनाया जाये वह और दो बाहुओं पर जो वर्ग बनाये जायें उनके जोड़ के समान हो तो इन दो बाहुओं का अन्तर्गत कोन समकोण होगा ॥

कखग एक त्रिकोण है और खग पर वर्ग खक कग पर के वर्गों के जोड़के समान है तो कोण खकग समकोण होगा ॥

बनावट – क से कग पर कघ समकोण बनाता हुवा खींचो १.११
कघ को समान कख के बनाओ घग को जोड़ दो

प्रमाण – फिर क्योंकि कघ समान कख के है बनावट
इस लिये कघ पर का वर्ग कख पर के वर्ग के समान है
इन दोनों में गक पर का वर्ग जोड़ दो

इस लिये गक कघ पर के वर्गों का जोड़ गक कख पर के वर्गों के जोड़ के समान है॥ पर क्योंकि घकग समकोण है इस लिये घग पर वर्ग गक कघ पर के वर्गों के जोड़ के समान है १.४७

और खग पर वर्ग गक कख पर के वर्गों के जोड़ के समान है क.अर्थ
इस लिये घग पर का वर्ग खग पर के वर्ग के समान है
इस लिये बाहु घग बाहु खग के समान है

फिर क्योंकि त्रिकोण घकग खकग में घक समान खक के है बनावट
और कग दोनों में सामान्य है और तीसरा बाहु घग तीसरे बाहु खग के समान है सिद्ध
इस लिये कोण घकग कोण खकग के समान है
परन्तु घकग एक समकोण है
इस लिये खकग भी एक समकोण है॥

प्रथम पुस्तक पर अभ्यास।

त्रिकोणों की समतः बराबरी पर।

१। यदि किसी त्रिकोण के शीर्ष से आधार पर लम्ब आधार के दो सम भाग करे तो त्रिकोण समद्विबाहु होगा॥

२। यदि किसी त्रिकोण के शीर्ष कोण का दो समभाग करनेवाली रेखा आधार पर लम्ब हो तो त्रिकोण समद्विबाहु होगा॥

३। यदि किसी त्रिकोण के शीर्ष कोण के दो सम भाग करनेवाली रेखा आधार के भी दो समभाग करे तो त्रिकोण समद्विबाहु होगा॥

[दो सम भाग करनेवाली रेखा को बढ़ाओ और बनावट को पु. १ साध्य १६ के अनुसार पूरा करो।]

४। यदि किसी त्रिकोण में दो सीधी रेखायें जो आधार के सिरे से बाहु के साथ समान कोण बनाती हुई खींची जायें समान हों तो त्रिकोण समद्विबाहु होगा॥

५। यदि किसी त्रिकोण में आधार के सिरों से सन्मुख बाहु पर जो लम्ब डाले जायें और समान हों तो त्रिकोण सम द्विबाहु होगा॥

६। दो त्रिकोण कखग कखघ एक ही आधार कख पर और उसके आमने सामने की ओर इस प्रकार से स्थित हैं कि कग समान कघ के और खग समान खघ के है सिद्ध करो कि रेखा जो बिन्दु ग और घ को मिलाती है कख पर लम्ब होगी॥

७। कखग एक त्रिकोण है जिस में सीधी रेखा कस शीर्ष कोण खकग के दो सम भाग करती है ख से कस पर खघ लम्ब डालो और उसको बढ़ाओ कि कग या बढ़े हुये कग से च पर मिले सिद्ध करो कि सघ समान घच के है॥

८। चतुर्भुज कखगघ में कख समान कघ के और खग समान घग के है सिद्ध करो कि कर्ण कग उन कोणों के दो सम भाग करता है जिन को वह मिलाता है॥

९। चतुर्भुज कखगघ में सन्मुख बाहु कघ-खग समान हैं और कर्ण कग खघ समान हैं यदि कग और खघ एक दूसरे को त पर काटें तो सिद्ध करो कि प्रत्येक त्रिकोण कटख घटग समद्विबाहु त्रिकोण हैं॥

१०। यदि किसी त्रिकोण का एक कोण शेष दो कोणों के जोड़ के समान हो तो सब से बड़ा बाहु उस सीधी रेखा का दूना होगा जो उसके मध्य विन्दु को सन्मुख कोण से मिलावे॥

समानान्तर रेखाओं और चतुर्भुजों पर।

११। यदि एक सीधी रेखा दो समानान्तर सीधी रेखाओं से मिले और दो अन्तःकोण के दो दो सम भाग किये जायें तो सिद्ध करो कि दो समभाग करनेवाली रेखायें एक दूसरे के साथ सम कोण बनाती हैं॥

१२। किसी कोण के दो समभाग करनेवाली रेखा में किसी विन्दु से यदि सीधी रेखायें कोण के बाहु के समानान्तर खींची जायें और उन ही पर समाप्त हों तो ये रेखायें समान होंगी और चित्र विषम कोण समचतुर्भुज बनेगा॥

१३। किसी सीधी रेखा का मध्यविन्दु जो दो समानान्तर सीधी रेखा से मिलती है और उन हीं पर समाप्त होती है समानान्तर रेखाओं से समान दूरी पर होगा॥

१४। एक सीधी रेखा के जो दो समानान्तर रेखाओं से मिलती है और उन ही पर समाप्त होती है दो समभाग किये गये हैं सिद्ध करो कि कोई और सीधी रेखा जो मध्य विन्दु में से होती हुई समानान्तर रेखाओं पर समाप्त हों उसी विन्दु पर दो सम भाग में बंट जाती हैं॥

१५। यदि किसी विन्दु से जो दो समानान्तर रेखाओं से समान दूरी

पर हो दो और सीधी रेखायें समानान्तर सीधी रेखाओं को काटती हुई खींची जायें तो समानान्तर रेखाओं के कटे भाग समान होंगे॥

१६। कख गघ दो हुई दो सीधी रेखा हैं और म दिया हुआ विन्दु कख में है कख में ऐसा विन्दु र मालूम करो कि मर समान हो र से गघ पर के लम्ब के

१७। कखग एक समद्विबाहु त्रिकोण है खग के समानान्तर घच खींचो जो समान बाहु से घ और च पर मिले और खघ घच चग सब समान हों॥

१८। किसी त्रिकोण के एक बाहु के मध्य विन्दु से एक सीधी रेखा आधार के समानान्तर खींची गई है तो वह दूसरे बाहु के भी दो सम भाग करेगी॥

१९। सीधी रेखा जो किसी त्रिकोण के दो बाहुओं के मध्य विन्दुओं को मिलाती है आधार के समानान्तर होती है॥

२०। सीधी रेखा जो किसी त्रिकोण के दो बाहुओं के मध्य विन्दुओं को मिलाती है आधार की आधी होती है॥

२१। सिद्ध करो कि वे सीधी रेखायें जो किसी त्रिकोण के बाहु के मध्य विन्दुओं को मिलाती हैं त्रिकोण के भीतर चार ऐसे त्रिकोण बनाती हैं जो परस्पर समान होते हैं॥

२२। सीधी रेखाएं जो किसी त्रिकोण के दो बाहुओं के मध्य विन्दुओं को मिलाती हैं उस सीधी रेखा के दो सम भाग करती है जो शीर्ष को आधार के किसी विन्दु से मिलावे॥

२३। कख कग दी हुई दो सीधी रेखायें हैं और थ उनके बीच में एक विन्दु है थ में से होती हुई सीधी रेखा खींचो जो कख कग पर समाप्त हों और थ पर उसके दो सम भागहो जायें॥

२४। कखगघ एक समानान्तर चतुर्भुज है और मर सम्मुख बाहु

कघ खग के मध्य विन्दु हैं सिद्ध करो कि खम और घर कर्ण कग को तीन सम भाग करती है ॥

२५। यदि किसी चतुर्भुज के आसन्न बाहुओं के मध्य विन्दु मिला दिये जायें तो जो चित्र बनेगा वह समानान्तर चतुर्भुज होगा ॥

२६। सिद्ध करो कि वह सीधी रेखा जो किसी चतुर्भुज के सन्मुख की बाहु के मध्य विन्दु को मिलाती है एक दूसरे के दो सम भाग करती हैं ॥

क्षेत्रफलों पर।

२७। सिद्ध करो कि वह सीधी रेखा जो किसी समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण के मध्यविन्दु में हो कर खींची जाती है समानान्तर चतुर्भुज को दो सम भाग करती है [१.२९, २६] ॥

२८। दिये हुवे विन्दु में से होती हुई सीधी रेखा खींचो जो एक समानान्तर चतुर्भुज के दो सम भाग करे ॥

२९। समानान्तर चतुर्भुज के एक बाहु पर लम्ब डाल कर चित्र के दो सम भाग करो ॥

३०। दी हुई रेखा के समानान्तर सीधी रेखा खींच कर समानान्तर चतुर्भुज के दो समभाग करो ॥

३१। कखगघ एक विषम चतुर्भुज है जिस में बाहु कख समानान्तर घग के है सिद्ध करो कि इस का क्षेत्रफल उस समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान होगा जो खग के मध्य विन्दु म में से होती हुई कघ के समानान्तर सीधी रेखा खींचे जाने से बनता है ॥

३२। यदि दो सीधी रेखायें कख गघ एक दूसरे को म पर काटें और यदि सीधी रेखायें कघ और खग जो उन के सिरों को मिलाती हैं समानान्तर हों तो सिद्ध करो कि त्रिकोण कमघ खमग समान होंगे ॥

३३। यदि दो सीधी रेखायें कखगघ विन्दु म पर एक दूसरे को

इस प्रकार से काटें कि त्रिकोण कमघ मगघ समान हों तो कग और खघ समानान्तर होंगी ॥

३४। कखगघ एक समानान्तर चतुर्भुज है और बढ़े हुए कर्ण कग में म एक विन्दु है सिद्ध करो कि त्रिकोण मखग मघग समान हैं [देखो अभ्या. १३ प. ६४]॥

३५। यदि किसी चतुर्भुज के बाहु के मध्यविन्दु क्रम से मिलाये जायें तो समानान्तर चतुर्भुज जो बनेगा दिये हुये चित्र का आधा होगा [देखो अभ्या. २५]॥

मिश्रित अभ्यास।

३६। समद्विबाहु त्रिकोण कखग का शीर्षक है और खकघ तक बढ़ाया गया है इस प्रकार से कि कघ समान खक के है यदि घग खींचा जाय तो कोण खगघ समकोण होगा

३७। सीधी रेखा जो किसी समकोण त्रिकोण के कर्ण के मध्य विन्दु को समकोण से मिलाती है कर्ण की आधी होती है ॥

३८। त्रिकोण के आधार के सिरों से सन्मुख बाहु पर (बढ़ा कर यदि ज़रूरत हो) लम्ब डाले गये हैं सिद्ध करो कि सीधी रेखाएं जो लम्ब के पादों को आधार के मध्य विन्दु से मिलाती हैं समान होंगी ॥

३९। कखग त्रिकोण में कघ आधार खग पर लम्ब है और मरल बाहु खग गक कख के पृथक् पृथक् मध्य विन्दु हैं तो सिद्ध करो कि प्रत्येक त्रिकोण लमर लघर त्रिकोण कखग के समान हैं ॥

४०। समकोण त्रिकोण में समकोण से कर्ण पर लम्ब डाला गया है तो दो त्रिकोण जो इस प्रकार बनेंगे समान कोणवाले होंगे ॥

४१। यदि किसी त्रिकोण के बाहु के मध्यविन्दुओं से बाहु पर लम्ब डाले जायें तो सिद्ध करो कि वे एक विन्दु पर मिलेंगे ॥

४२। सिद्ध करो कि त्रिकोण के कोणों के सम दो भाग करनेवाले एक विन्दु पर मिलते हैं॥

४३। सिद्ध करो कि त्रिकोण के दो वहिःकोण के सम दो भाग करनेवाले भुज तीसरे कोण के सम दो भाग करनेवाली रेखा पर मिलते हैं॥

४४। सिद्ध करो कि त्रिकोण के तीनों मध्यस्थ एक विन्दु पर मिलते हैं॥

४५। त्रिकोण कखग में यदि कग कख से बड़ा न हो तो सिद्ध करो कि कोई सीधी रेखा जो शीर्षक से खींची जाय और आधार खग पर समाप्त हो कख से कम होगी॥

४६। कखग एक त्रिकोण है और शीर्ष कोण खकग के एक सीधी रेखा जो आधार खग से म पर मिलती है दो समभाग करती है सिद्ध करो कि खक बड़ा है खम से और गक बड़ा है गम से॥ और इस प्रकार से १.२० को सिद्ध करो॥

४७। दिये हुवे विन्दु से दी हुई रेखा तक जितनी सीधी रेखायें खींची जा सकती हैं उन में लम्ब सब से छोटी होती है और शेष में जो लम्ब के समीप होती है लम्ब के दूरवाली से छोटी होती है और दिये विन्दु से दी हुई रेखा तक दो सीधी रेखायें परस्पर समान खींची जा सकती हैं एक लम्ब के इस ओर और एक उस ओर॥

४८। त्रिकोण के तीनों कोणों का किसी विन्दु से दूरियों का जोड़ त्रिकोण के बाहु के आधे जोड़ से बड़ा होता है॥

४९। त्रिकोण के तीनों कोणों का उसके भीतरस्थित किसी विन्दु से अन्तरों का जोड़ त्रिकोण के बाहुओं के जोड़ से कम होता है॥

५०। चतुर्भुज के बाहु का जोड़ उसके कर्णों के जोड़ से बड़ा होता है॥

५१। पु. १ साध्य ४७ के चित्र में सिद्ध करो कि ?

(१) कख कच पर वर्गों का जोड़ कग और कघ पर के वर्गों के जोड़ के समान होता है।

(२) कग पर चौगुना वर्ग और कख पर वर्ग मिल कर चट पर के वर्ग के समान होता है।

(३) चट और छघ पर का वर्ग मिल कर पांच गुने वर्ग के समान होता है जो खग पर हो॥

५२। दो समकोण त्रिकोण जिन के कर्ण और एक बाहु परस्पर समान हों सब प्रकार से समान होते हैं॥

५३। समत्रिबाहु त्रिकोण के गुण द्वारा एक परिमित दी हुई सीधी रेखा के तीन सम भाग करो॥

५४। आधार, आधार का एक कोण और शेष दो बाहुओं का जोड़ दिया है त्रिकोण बनाओ॥

५५। आधार आधार का एक कोण और शेष दो बाहुओं का अन्तर दिया है त्रिकोण बनाओ॥

यूक्लिड की ज्यामिति।

प्रथम अध्याय।

लोकस् वा अवस्थितविन्दु के विषयमें।

ज्यामिति की अनेक साध्यों में हमको एक विन्दु के सम्बन्ध में एक ऐसा स्थान निर्णय करना रहता है कि जो निर्दिष्ट नियमों को पूरा करता हो और ऐसे सब साध्य जिनका कि अब तक विचार किया गया है नियत बार प्रमाण से सिद्ध होते देखने में आये हैं। तथापि यदि निर्दिष्ट नियम एक ही हो तो यह दशा न होवेगी॥

(१) एक ऐसा विन्दु निर्णय करना है जो किसी दिये हुए विन्दु से दी हुई दूरी पर हो।

यह साध्य वास्तव में अप्रमेय है अर्थात् इसके सिद्ध करने की अनेक रीति हो सकती हैं क्योंकि जो नियम दिया गया है वह एक ऐसे वृत्त की परिधि पर स्थित किसी विन्दु से पूरा पड़ सकता है जो दिये हुए विन्दु को केन्द्र और दी हुई दूरी को व्यासार्द्ध मानके खींचा जा सकता है। और यह नियम वृत्त के भीतर वा बाहर स्थित और किसी दूसरे विन्दुओं से पूरा नहीं पड़ सकता।

(२) एक ऐसा विन्दु निर्णय करना है जो किसी दी हुई सरल रेखा से दी हुई दूरी पर हो।

इस दशा में भी ऐसे अनगिनती विन्दु हो सकते हैं जो उन दो समानान्तर सरल रेखाओंपर होंगे जो कि दिये हुए विन्दु से दी हुई दूरी पर किसी ओर स्थित हों। और कोई भी ऐसे विन्दु जो कि इन समानान्तर सीधी रेखाओं में से एक पर भी न हों दिये हुए नियम को पूरा नहीं कर सकते।

अतएव हम देखते हैं कि केवल एक ही नियम किसी विन्दु की ठीक ठीक स्थिति निर्णय करने में पर्याप्त नहीं होता पर इतना तो कर सकता

है कि उसके लिये कोई सीधी वा टेढ़ी रेखा वा रेखाएं नियत हो जावें। इन बातों से हम को निम्नलिखित परिभाषा बनानी पड़ती है।

परिभाषा – किसी विन्दुका लोकस् वा अवस्थान विन्दु वह रेखा, रेखाएं वा रेखा के विभाग हैं जिन पर कि विन्दु नियम से बद्ध है और जो निर्दिष्ट नियमों को पूरा करता है पर यह नियम इसी रेखा वा इन्हीं रेखाओं पर स्थित प्रत्येक विन्दु से पूरा पड़ता हो और किसी भी दूसरे विन्दु से नहीं।

कभी २ लोकस् की यह परिभाषा भी की जाती है कि वह एक ऐसा मार्ग है कि जिसे किसी नियत रीति से चलने वाला विन्दु बनाता है।

इस प्रकार से किसी विन्दु का लोकस् जो कि सदा किसी दिये हुए विन्दु से दी हुई दूरी पर रहता है एक ऐसा वृत्त होगा जिसका कि केन्द्र दिया हुआ विन्दु है। और किसी दिये हुए विन्दु का लोकस् जो किसी निर्दिष्ट रेखा से निर्दिष्ट दूरी पर है दो समानान्तर सरल रेखायें होंगी।

अब हम देखते हैं कि किसी रेखा वा रेखा समूह को निर्दिष्ट नियम के अनुसार किसी विन्दु का लोकस् प्रमाणित करने में यह सिद्ध करना आवश्यक होता है कि –

(१) कोई विन्दु जो निर्दिष्ट नियमों को पूरा करता है ऐसे कल्पित लोकस् पर होगा।

(२) ऐसे कल्पित लोकस् पर का प्रत्येक विन्दु दिये हुए नियम को पूरा करता है।

१. एक विन्दु का लोकस् निर्णय करो जो दो दिये हुए विन्दुओं से समान दूरी पर हो।

मान लो कि कख दो दिये हुए विन्दु हैं।

(क) मानलो कि क और ख से समान दूरी पर एक विन्दु त है और कत = खत के।

कख के म पर दो समभाग करो और तम को जोड़ दो।

अब दो त्रिभुज कमत और खमत में

क्योंकि { कम = खम [बनावट
और तम दोनों में सामान्य है
और कत = खत। [कल्पित अर्थ

इसलिये कोण तमक = कोण तमख के [१.८

और वे आसन्न कोण हैं

अतएव तम, कख पर लम्ब है [परि १०.

इसलिये कोई विन्दु जो कि क और ख से समान दूरी पर है उस सरल रेखा पर स्थित है जो कख को समकोण पर काटती है।

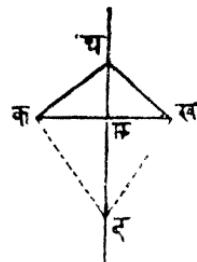
(ख) और इस सरल रेखा पर स्थित प्रत्येक विन्दु क और ख से समान दूरी पर हैं।

क्योंकि मान लो कि इस रेखा में एक विन्दु थ है।

कथ और खथ को जोड़ दो

अब दो त्रिभुज कमथ और खमथ में

क्योंकि { कम = खम
और मथ दोनों में सामाना है
और कोण कमथ = कोण खमथ के
क्योंकि प्रत्येक समकोण हैं

इसलिये कथ = खथ

अर्थात् थ, क और ख से समान दूरी पर है। [१.४.

इसलिये हम सिद्ध करते हैं कि दो दिये हुए विन्दु कख से समान दूरी पर स्थित किसी विन्दु का लोकस् वह सीधी रेखा है जो कख को समकोण पर काटती है।

२. किसी दिये हुए विन्दु से किसी दी हुई अपरिमित सरलरेखा तक खींची गई सरल रेखा के मध्य विन्दु का लोकस् मालुम करो।

[दिये हुए विन्दु से दी हुई सीधी रेखा पर लम्ब डालो। वह सरल रेखा जो दी हुई रेखा के समानान्तर है और लम्ब के दो समभाग करती है मालुम किया जाने वाला लोकस् है]

३. परस्पर एक दूसरे को काटनेवाली दी हुई सरल रेखा से समान दूरी पर स्थित किसी विन्दु का लोकस् मालुम करो ।

४. दिये हुए वृत्त की परिधि से दिये हुए व्यासार्द्ध की दूरी पर स्थित विन्दु का लोकस् मालुम करो ।

५. एक विन्दु इस प्रकार से चलता है कि परस्पर एक दूसरे को काटती हुई दो दी हुई अपरिमित सरल रेखा से उसकी दूरी का जोड़ सदा समान है । इस विन्दु का लोकस् मालुम करो ।

६. परस्पर एक दूसरे को काटती हुई दो दी हुई अपरिमित सरल रेखा से किसी विन्दु का अन्तर सदा समान है । इस विन्दु का लोकस् मालुम करो ।

७. परस्पर एक दूसरे के समकोण पर स्थित दो सीधे रूलरों के बीच निर्दिष्ट लम्बाई वाला एक दण्ड फिसल रहा है इसके मध्य विन्दु का लोकस् मालुम करो ।

८. दिये हुए आधार को कर्ण मानकर समकोण त्रिकोण खींचे गये हैं उनके शीर्ष कोण का लोकस् मालुम करो ।

९. कख एक दी हुई सीधी रेखा है और ख विन्दु पर होती हुई किसी सरल रेखा पर क से कम लम्ब खींचा गया है । कम के मध्य विन्दु का लोकस् मालुम करो ।

१०. किसी त्रिभुज का आधार और क्षेत्रफल दिया है उसके शीर्षकोण का लोकस् मालुम करो ।

११. किसी समानान्तर चतुर्भुज का आधार और क्षेत्र फल दिया है उसके कर्णों के परस्पर काटने के स्थान का लोकस् मालुम करो ।

१२. किसी दिये हुए आधार पर खींचे गये और दिये हुए क्षेत्रफल वाले त्रिकोण की भुजाओं के दो समभाग करनेहारी सरल रेखाएं जिस विन्दु पर मिलती हैं उसका लोकस् मालुम करो ।

Calcutta—Printed at the Bapt. Miss. Press.